單元 41: 偏導函數
(課本 §10.3)

一. 複習

單變數函數 $f(x)$ 的變化可由

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

即瞬間變化率, 表現出, 幾何意義, 乃切線斜率, 如圖示.

二. 偏導函數

問. 如何描述 $f(x, y)$ 之變化?

答. 先不需要同時觀察二個變數的改變, 而分別固定一個變數, 再觀察另一個變數的變化即可! 因此, 有如下的定義.

定義. 對自變數 x 的偏導函數 (partial derviative of f with respect to x)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

亦即, 將 y 固定, 視爲常數, 並令 x 改變, 而得的變化率.

對自變數 y 的偏導函數 (partial derviative of f with respect to y)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

亦即, 將 x 固定, 視爲常數, 並令 y 改變, 而得的變化率.

註 1. 符號: 可以下標的方式表示出對不同的自變數的偏導函數, 如

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

以及

$$f_y(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

註 2. 幾何上的意義: 如圖示, 首先將 $y=y_0$ 固定, 可得垂直平面 $y=y_0$ 與曲面 $z=f(x,y)$ 的交集爲一曲線

$$z=f(x,y_0)$$

其在 xz 平面上的投影如圖示.

所以,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\\ &= \text{過 } x \text{ 座標爲 } x_0 \text{ 與 } x_0+h \text{ 的}\\ &\quad\ \text{兩點的割線斜率的極限}\\ &= \text{在曲線 } z=f(x,y_0) \text{ 上過點}\\ &\quad\ (x_0,y_0) \text{ 的切線斜率}\end{aligned}$$

同理, 將 $x=x_0$ 固定, 可得垂直平面 $x=x_0$ 與曲面 $z=f(x,y)$ 的交集爲一曲線

$$z=f(x_0,y)$$

其在 yz 平面上的投影如下圖.

所以,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}\\ &= \text{過 } y \text{ 座標爲 } y_0 \text{ 與 } y_0+h \text{ 的}\\ &\quad\ \text{兩點的割線斜率的極限}\\ &= \text{在曲線 } z=f(x_0,y) \text{ 上過點}\\ &\quad\ (x_0,y_0) \text{ 的切線斜率}\end{aligned}$$

三. 求偏導函數的方法

根據偏導函數的定義, 求法如下:

(1) 求 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 的方法: 視 y 為常數, 對 x 微分.

(2) 求 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 之方法: 視 x 為常數, 對 y 微分.

例 1. (a) 令

$$f(x,y) = ye^{xy}$$

則, 視 y 為常數並對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) \\ &= y \cdot e^{xy} \cdot y \\ &= y^2 e^{xy}\end{aligned}$$

接著, 視 x 為常數, $f(x,y)$ 為兩個含 y 的式子 (y 與 e^{xy}) 的乘積, 故以乘法規則對 y 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x \\ &= e^{xy}(1+xy)\end{aligned}$$

(b) 令

$$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+\cos y}$$

則, 視 y 爲常數並對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\\ &= \frac{\cos(xy)\cdot y\cdot(x^2+\cos y)-(2x)\sin(xy)}{(x^2+\cos y)^2}\end{aligned}$$

(c) 令

$$f(x,y)=3-x^3-y^2$$

則, 視 y 爲常數並對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}f_x(1,1) &= f_x(x,y)\Big|_{(1,1)}\\ &= -3x^2\Big|_{(1,1)}\\ &= -3\end{aligned}$$

其幾何意義爲, 當 $y=1$ 時, "曲面 $z=f(x,y)$ 與垂直平面 $y=1$ 的交集" 在 xz 平面的投影是曲線

$$z=2-x^3$$

如圖示, 其上過 $x=1$ 的點的切線斜率爲

$$\begin{aligned}z'(x)\Big|_{x=1} &= -3x^2\Big|_{x=1}\\ &= -3=f_x(1,1)\end{aligned}$$

如前所述. 同理, 視 x 爲常數並對 y 微分, 得

$$\begin{aligned} f_y(1,1) &= f_y(x,y)\big|_{(1,1)} \\ &= -2y\big|_{(1,1)} = -2 \end{aligned}$$

幾何意義如下: 當 $x = 1$ 時, “曲面 $z = f(x,y)$ 與垂直平面 $x = 1$ 的交集” 在 yz 平面的投影是曲線

$$z = 2 - y^2$$

如圖示, 其上過 $y = 1$ 的點的切線斜率爲

$$\begin{aligned} z'(y)\Big|_{y=1} &= -2y\big|_{y=1} \\ &= -2 = f_y(1,1) \end{aligned}$$

如前所述.

四. 二個以上自變數的偏導函數

可如下例, 自然地推廣.

例 2. 令

$$f(x,y,z) = e^{yz}(x^2 + z^3)$$

則, 視 y, z 爲常數並對 x 微分, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz}(2x)$$

視 x, z 爲常數並對 y 微分, 得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ze^{yz}(x^2 + z^3)$$

視 x, y 爲常數並以乘法規則對 z 微分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= ye^{yz}(x^2 + z^3) + e^{yz}(3z^2) \\ &= e^{yz}(yx^2 + yz^3 + 3z^2)\end{aligned}$$

五. 高階偏導函數

二階偏導函數, 有如下的 4 種:

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}$

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$

其中

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \text{ 與 } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

稱作混合型偏導函數 (mixed derivatives).

同理, 可推廣三階, 四階, ..., 偏導函數.

例 3. 令

$$f(x, y) = \sin x + xe^y$$

則

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + e^y$$

再對 x 微分, 得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x + e^y) = -\sin x$$

又,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$$

再對 y 微分, 得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) = xe^y$$

此外, 根據混合型偏導函數的定義,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) = e^y$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x + e^y) = e^y$$

由此導出

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

問. 混合型偏導函數一定會相等嗎? 亦即, 微分的次序無關緊要嗎?

答. 不一定, 但相等 (亦即, 與微分次序無關) 的充分條件爲 : 若 $f(x, y)$ (或 $f(x, y, z)$, $\ldots$) 與其偏導函數 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} (一些特定的三階混合型偏導函數, $\ldots$) 均在 (x_0, y_0) 的一開圓碟上連續, 則

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

(所有這些特定的三階混合型偏導函數均相等, . . .).

例如, 令

$$f(x, y) = y^2 \sin x$$

因爲組成的元素 $\sin x$ 與 y^2 均是 "好函數", 故多次分別對 x 與 y 微分後的結果依然會是連續的, 也就是說, f_{xxy}, f_{yxx} 與 f_{xyx} 都會是連續的. 因此, 根據上述的充分條件,

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

亦即, 微分的次序是無關的.

驗證: 首先, 由

$$f_x = y^2 \cos x$$

可導出

$$f_{xx} = -y^2 \sin x$$

進而

$$f_{xxy} = -2y \sin x \qquad (1)$$

接著,

$$f_y = 2y \sin x$$

因此,

$$f_{yx} = 2y\cos x$$

以及

$$f_{yxx} = -2y\sin x \tag{2}$$

最後,

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos x) = 2y\cos x$$

並由此導出

$$f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}(2y\cos x) = -2y\sin x \tag{3}$$

因此, 比較 (1) 式, (2) 式, 與 (3) 式後, 得

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx} = -2y\sin x$$