單元 30: 泰勒近似
(課本 §7.6)

以多項式 (簡單函數) 近似 (估計) 函數的關鍵點 (一般而言):

(i) 階次 (次數, 次方) 愈高愈準確.

(ii) 局部性 (中心愈靠近欲估計之點愈準確).

一. 泰勒多項式

複習: $f(x)$ 在 $x=a$ 的線性近似 (linear approximation, 或稱切線近似) 爲

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

根據圖形, 可得知僅當 x 靠近 a 時, $f(x)\approx L(x)$. (x 遠離 a 時, $L(x)$ 與 $f(x)$ 之差就變大.)

問. 如何更進一步明確地表示相似?

觀察:

(1) $L(a) = f(a) + f'(a)(a - a) = f(a)$

(2) $L'(a) = L'(x)\Big|_{x=a} = f'(a)\Big|_{x=a} = f'(a)$

(3) $L''(a) = 0$, 但 $f''(a)$ 不一定等於 0. 所以, 無進一步的相似.

暗示: 根據觀察, 似乎當多項式與 $f(x)$ 在 $x = a$ 的導函數有愈多次的相同, 則近似愈準確.

問. 如何找這種多項式?

答. 爲單純計, 先設 $a = 0$. 令欲求的多項式爲

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 待定.

接著根據前面的觀察與暗示, 要求

$$P_n(0) = f(0)$$

$$P_n'(0) = f'(0)$$

$$P_n''(0) = f''(0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

此乃相當於

$$P_n(0) = a_0 = f(0)$$

$$\begin{aligned} P_n'(0) &= P_n'(x)\Big|_{x=0} \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}\Big|_{x=0} \\ &= a_1 = f'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n''(0) &= P_n''(x)\Big|_{x=0} \\ &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}\Big|_{x=0} \\ &= 2a_2 = f''(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n^{(3)}(0) &= P_n^{(3)}(x)\Big|_{x=0} \\ &= 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + \cdots + \\ &\qquad n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}\Big|_{x=0} \\ &= 3\cdot 2a_3 = 3!a_3 = f^{(3)}(0) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(0) &= P_n^{(n)}(x)\Big|_{x=0} \\ &= n(n-1)\cdots 1 a_n\Big|_{x=0} = n!a_n = f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

解上列各式, 得

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{1}{2!}f''(0)$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}f^{(3)}(0),\ \cdots,\ a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

因此, 得

$$\begin{aligned} P_n(x) \ &= \ f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \\ & \qquad \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

稱作 $f(x)$ 在 $x = 0$ (以 $x = 0$ 爲中心) 的 n 階泰勒多項式.

註. $n = 1$ 時,

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x) = L(x)$$

即, 一階泰勒多項式 $P_1(x)$ 就是線性近似 $L(x)$.

例 1. 試求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 的 n 階泰勒多項式 $P_n(x)$, 並比較 $f(0.1)$, $P_1(0.1)$, $P_3(0.1)$, 與 $P_4(0.1)$ 的值, 以及它們之間的差異和結論.

<解> (i) 根據泰勒多項式的公式. 需先求出 $f(x)$ 在 $x=0$ 的連續 n 個導函數值:

$$\begin{aligned}
f(x)=e^x &\Rightarrow f(0)=e^0=1\\
f'(x)=e^x &\Rightarrow f'(0)=e^0=1\\
f''(x)=e^x &\Rightarrow f''(0)=e^0=1\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x)=e^x &\Rightarrow f^{(n)}(0)=e^0=1
\end{aligned}$$

因此, n 階泰勒多項式

$$\begin{aligned}
&P_n(x)\\
&= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\\
&\qquad +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\
&= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n
\end{aligned}$$

(ii) 根據 (i) 所求出的泰勒多項式, 列表比較 $f(0.1)$,

$P_1(0.1)$, $P_3(0.1)$, 與 $P_4(0.1)$ 的值如下:

x	0.1
$f(x) = e^x$	1.105170918
$P_1(x) = 1 + x$	1.1
$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$	1.1052
$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$	1.10516667

因此, 泰勒多項式的階次 n 愈高, 估計愈準確.

例 2. 試求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 的 n 階泰勒多項式 $P_n(x)$.

<解> 根據泰勒多項式的公式, 先求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 的連續 n 個導函數值:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sin x &\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0 \\
f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1 \\
f''(x) = -\sin x &\Rightarrow f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -\cos x &\Rightarrow f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x &\Rightarrow f^{(4)}(0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

由此可歸納出下列的型式:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$f^{(n)}(0)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	$\cdots$

因此,

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

註. 爲何最後一個一般項的符號是 $(-1)^n$, 而不是 $(-1)^{n+1}$?

事實上, $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 均可形成正負交替, 但哪一個對?

舉例驗證即可: 將 3 化成 $2n+1$ 的形式, 可得

$$3 = 2(1) + 1$$

由此,

$$(-1)^n = (-1)^1 = -1$$

與 x^3 項的符號相符. 然而

$$(-1)^{n+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$$

卻與 x^3 項的符號不符, 故取

$$(-1)^n$$

爲一般項的符號.

二. 在 $x=a$ 的泰勒多項式

類似於在 $x=0$ 的泰勒多項式, 在 $x=a$ (以 $x=a$ 爲中心) 的泰勒多項式推廣如下: 爲方便計, 設多項式

$$\begin{aligned} P_n(x) &= c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+ \\ &\qquad \cdots+c_n(x-a)^n \end{aligned}$$

其中 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ 待定.

爲相似度, 要求

$$P_n(a)=f(a)$$

$$P_n'(a)=f'(a)$$

$$P_n''(a)=f''(a)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$$

乃相當於

$$P_n(a) = c_0 = f(a)$$

$$\begin{aligned} P_n'(a) = P_n'(x)\Big|_{x=a} \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + \\ &\qquad nc_n(x-a)^{n-1}\Big|_{x=a} \\ &= c_1 = f'(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n''(a) = P_n''(x)\Big|_{x=a} \\ &= 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \cdots + \\ &\qquad n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}\Big|_{x=a} \\ &= 2c_2 = f''(a) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(a) &= P_n^{(n)}(x)\Big|_{x=a} \\ &= n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1c_n\Big|_{x=a} \\ &= n!c_n = f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

解上列各式, 得

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{1}{2!}f''(a)$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}f^{(3)}(a),\ \ldots,\ c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

因此, $f(x)$ 在 $x=a$ (以 $x=a$ 爲中心) 的 n 階泰勒多項式

$$P_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

例 3. 試求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 的 n 階泰勒多項式.

<解> 根據 n 階泰勒多項式的公式, 需要先求求連續 n 個 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 的導函數值: 經由微分公式, 連續微分並求值, 得

$$f(x)=\ln x \;\Rightarrow\; f(1)=\ln 1=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(1)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{(-1)(-2)}{x^3} \;\Rightarrow\; f^{(3)}(1)=2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}$$
$$\Rightarrow \; f^{(4)}(1) = (-1)^3 3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)(-2)\cdots(-(n-1))}{x^n}$$
$$\Rightarrow \; f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

所以, 以 $x = 1$ 為中心的 n 階泰勒多項式

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \\
&\quad \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \\
&\quad \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 - \\
&\quad \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \\
&\quad \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n
\end{aligned}$$

問. 準確度如何? 是否階次 n 愈大愈準確? 適用的範圍爲何?

舉例說明. 令

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ x \neq 1$$

則 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 n 階泰勒多項式 (參看第 375 頁的例 3)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x},\ x \neq 1 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \text{誤差} &= |f(x) - P_n(x)| \\ &= \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n-1}}{1-x}\right| \\ &= \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \\ &\to \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| < 1 \\ \infty, & \text{若 } |x| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

當階次 $n \to \infty$.

結論: 階次 n 愈大愈準且適用範圍是

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

問. 一般的函數 $f(x)$ 又如何呢?

泰勒公式 (Taylor's Formula). 令 I 爲一含 a 的區間. 設

$$f : I \to R$$

且 f 以及其連續 $(n+1)$ 個導函數均在 I 上連續. 則對於 $x, a \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) = \ & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

其中

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

亦即,

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

且

$$誤差 = |f(x) - P_n(x)| = |R_{n+1}(x)|$$

<證> 由微積分基本定理,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

移項整理, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \qquad (1) \\ &= f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x (x-t)^0 f'(t)dt \end{aligned}$$

故 $n = 0$ 成立. 接著, 根據取

$$u = f'(t);\ dv = dt$$

的分部積分, 得

$$du = f''(t)dt$$

且爲方便計,

$$v = \int dt = t + C = t - x = -(x-t)$$

即, 令 C 爲目前區間 I 中所考慮的一個固定值 $-x$ (一般而言, 令 $C = 0$), 以及

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)dt &= \int_a^x 1 \cdot f'(t)dt \\ &= -(x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \\ &= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a) \\ &\quad +\int_a^x (x-t)f''(t)dt \qquad (2) \end{aligned}$$

故, $n=1$ 成立. 再根據類似的分部積分, 選取

$$u=f''(t);\ dv=(x-t)dt$$

得

$$du=f^{(3)}(t)dt$$

且

$$v=\int (x-t)dt=-\frac{1}{2}(x-t)^2$$

以及

$$\begin{aligned} &\int_a^x (x-t)f''(t)dt \\ &= -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_a^x+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)dt \\ &= \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)dt \end{aligned}$$

代入 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)dt \end{aligned}$$

即, $n = 2$ 成立. 最後, 假設 $n-1$ 時成立, 即

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \quad (3) \end{aligned}$$

再根據同樣的分部積分技巧, 取

$$u = f^{(n)}(t);\ dv = \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt$$

得

$$du = f^{(n+1)}(t)dt$$

且

$$v = \int \frac{1}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = -\frac{1}{n!}(x-t)^n$$

以及

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\ &= -\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x \\ &\qquad + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \end{aligned}$$

代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

其中

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

故根據數學歸納法得證.

註 1. 一般而言, 無法積出 $R_{n+1}(x)$ 的精確值. 如何估計?

註 2. $R_{n+1}(x)$ 的另一表示法:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

其中 c 爲介於 a 與 x 之間的某一點 (不確定是哪一點).

註 3. 如何估計 $R_{n+1}(x)$? 設存在 K 使得對所有介於 a 與 x 之間的 t,

$$|f^{(n+1)}(t)| \le K$$

則

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

此乃因爲 c 介於 a 與 x 之間, 故由假設, 得

$$|f^{n+1}(c)| \leq K$$

再根據註 2 所述的 $R_{n+1}(x)$ 的另一表示法, 而可導出上式.

誤差估計的用途:

1. 作爲一較大的誤差.

2. 以此公式求適當的階次 n.

3. n 愈大, 愈準確, 且 x 愈靠近 a, 愈準確.

例 4. 設 $f(x) = e^x$. 試求適當的階次 n, 使得以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒多項式估計 $f(1) = e^1$ 時的誤差會小於 10^{-5}.

<解> 首先, 根據泰勒公式, $f(x)$ 在 $x=a=0$ 的泰勒多項式的誤差

$$\begin{aligned}|R_{n+1}(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\end{aligned}$$

其中 c 介於 x 與 0 之間. 因爲估計 $f(1)$, 故由上式, 得

$$\text{誤差} = |R_{n+1}(1)| = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1)^{n+1}$$

其中 c 介於 0 與 1 之間. 接著需找 K, 使得對所有的 $0 \leq t \leq 1$,

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq K$$

因爲 $f(x)=e^x$, 故 $f^{(n+1)}(x)=e^x$. 由此可導出, 對於所有的 $t \in [0,1]$,

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = e^t \leq e^1$$

因此, 可取

$$K = 3$$

題意要求

$$\text{誤差} < 10^{-5}$$

符合此要求的一個充分條件是誤差估計

$$\frac{3\cdot(1)^{n+1}}{(n+1)!}<10^{-5}$$

此乃相當於

$$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$$

亦相當於

$$3\times 10^5<(n+1)!$$

最後, 可採用代入的方法, 將 n 求出, 過程如下:

$$n=5 \ \Rightarrow \ 6!=720$$

$$n=6 \ \Rightarrow \ 7!=5040$$

$$n=7 \ \Rightarrow \ 8!=40320$$

$$n=8 \ \Rightarrow \ 9!=362880>3\times 10^5$$

所以, 可取 $n=8$ (事實上, 任何大於或等於 8 的 n 都符合要求, 但以符合要求的最小 n 爲準).

舉例驗證如下: 根據前面的結果,

$$P_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

因此,

$$\begin{aligned} P_7(1) &= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{7!} \\ &= 2.71825396825 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_8(1) &= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!} \\ &= 2.71827876984 \end{aligned}$$

又

$$f(1) = e = 2.71828182846$$

所以, 得出

$$\begin{aligned} |f(1)-P_8(1)| &\leq 0.0000031 = 3.1\times 10^{-6} \\ &< 10^{-5} \end{aligned}$$

然而

$$\begin{aligned} |f(1)-P_7(1)| &\leq 0.0000279 = 2.79\times 10^{-5} \\ &> 10^{-5} \end{aligned}$$

不夠小. 因此, 至少要取 $n=8$, 與前面所得的結果一致.

常用函數在 $x=0$ 的泰勒多項式及適用範圍:

$$\begin{aligned} \cos x = \ & 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ & +R_{2n+1}(x),\ \underbrace{-\infty < x < \infty}_{\text{適用範圍}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \\
&\qquad + R_{n+1}(x), \ -1 < x \le 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\
&\qquad + R_{n+1}(x), \ -1 < x < 1
\end{aligned}$$