單元 2: 基本函數
(課本 §1.2)

定義 1. 一函數 (function)

$$f : A \longrightarrow B$$

是一種規則 (rule), 將 A 中的<u>每一元素</u> x 指定給 B 中的<u>唯一</u>元素 y 如,

$$\underbrace{x \longrightarrow f(x)}_{\text{規則}}$$

並稱 y 為 x 在 f 之下的值 (value 或 image) 且以 $f(x)$ 表示之 (亦即, $y = f(x)$), 其中 A 稱為 f 的定義域 (domain), B 為對應域 (codomain),

f 的值域 (range) $\overset{\text{記成}}{=} f(A) =$
$\{y \in B : y = f(x),$ 針對某些 (for some) $x \in A\}$
$\subseteq B$

如,

$$f_1 : R \longrightarrow R$$

(規則為 $x \longrightarrow x^2$)

則 f_1 的定義域 $= R$, 值域 $= [0,\infty) \subseteq R$.

$$f_2 : [0,1] \longrightarrow R$$

$$(\text{規則爲 } x \longrightarrow x^2)$$

則 f_2 的定義域 $= [0,1]$, 值域 $= [0,1]$.

註: f_1 與 f_2 有相同的規則 (rule), 但卻爲不同的函數 (functions) (因爲定義域不同).

定義 2. 兩函數 f 與 g 相同若且爲若 (if and only if, 當且僅當, $\Leftrightarrow$)

(i) 有相同的定義域 (domain) 且

(ii) $f(x) = g(x)$ (亦即, 有相同的規則 (rule))

定義 3. 設 $f : A \longrightarrow B$

(i) 若對每一個 $x \in A$,

$$f(-x) = f(x)$$

則稱 f 爲一偶函數 (even function), 其圖形對稱於 y-軸 (y-axis), 如圖 1.

(ii) 對每一個 $x \in A$, 若

$$f(-x) = -f(x)$$

則稱 f 爲一奇函數 (odd function), 其圖形對稱於原點 (origin), 如圖 2.

如, 圖 3 所示,

$$f(x) = x^2 : \text{偶函數}$$

$$g(x) = x^3 : \text{奇函數}$$

又如,

$$\sin(\theta) : \text{奇函數 (因爲} \sin(-\theta) = -\sin(\theta))$$

$$\cos(\theta) : \text{偶函數 (因爲} \cos(-\theta) = \cos(\theta))$$

定義 4. 合成函數 (composite function)

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))$$

如圖 4 所示.

$f \circ g$ 的定義域 $= \{x \in g$ 的定義域: $g(x) \in f$ 的定義域 $\}$
(= 原料中, 其半成品 $g(x)$ 可被接受的部分)
(或使得半成品 $g(x)$ 可被接受的原料)

如, 若

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$$

且

$$g(x) = x^3 + 1,\ x \in R$$

則

(i) 根據合成函數的定義,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^3+1) \\ &= \sqrt{x^3+1}\end{aligned}$$

$$\text{定義域} = \{ \underbrace{x \in R}_{x \in D \text{ of } g} : \overbrace{x^3 + 1 \geq 0}^{g(x) \in D \text{ of } f} \}$$

其中 D 表示定義域 (domain)

$$= [-1, \infty)$$

(ii) 同樣根據合成函數的定義,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^3 + 1 \\ &= x^{3/2} + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{定義域} &= \{ \underbrace{x \geq 0}_{x \in D \text{ of } f} : \overbrace{\sqrt{x} \in R}^{f(x) \in D \text{ of } g} \} \\ &= \{x : x \geq 0\} \\ &= [0, \infty)\end{aligned}$$

($\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$. 所以, $f \circ g$ 與 $g \circ f$ 不一定相等.)

幾個常用的基本函數:

(i) 多項式函數 (Polynomial Functions):

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

稱作 n 次多項式 (n 爲次方 (degree)), 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲實數值常數 (real-valued constants), 且 $a_n \neq 0$.

如,

$$p(x) = 2x^3 - 4x + 7,\ x \in R$$

爲三次多項式,

(ii) 有理函數 (Rational Functions) :

$$r(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p(x)$, $q(x)$ 爲多項式且 $q(x) \neq 0$.

如,

$$r_1(x) = \frac{1}{x-2},\ x \neq 2$$

$$r_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x-5},\ x \neq 5$$

(iii) 冪函數 (Power Functions):

$$f(x) = x^r$$

其中 r 爲一實數, 稱作冪次 (power).

如,

$$y = x^{1/3},\ x \in R$$

$$y = x^{1/2},\ x \geq 0$$

$$y = x^{5/2},\ x \geq 0$$

$$y = x^{-1/2}\left(= \frac{1}{x^{1/2}}\right),\ x > 0$$

(因為 $x = 0$ 時, y 無意義)

(iv) 指數函數 (Exponential Functions):

令 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 則

$$f(x) = a^x, x \in R$$

是一底數為 a 的指數函數.

性質:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

註: 取

$$a = e\ (\approx 2.718281828)$$

時, 則稱

$$e^x \overset{\text{又記成}}{=} \exp(x)$$

爲自然指數函數 (natural exponential function).

(v) 反函數 (Inverse Functions):

簡言之, 函數 f 的反函數, 記作

$$f^{-1}$$

爲與 f 有<u>反效果</u>的函數, 也即,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

如圖 5.

問. 何時會有反函數?

“若至少有兩點 $x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$”

則爲了產生反效果, 必然要

$$f^{-1}(y) = x_1 \text{ 且 } f^{-1}(y) = x_2$$

如圖 6.

但這不符合函數的定義 (因爲 y 只可且必須被指定到唯一值). 所以欲得反函數, 必需除去“$\cdots$”的情況. 此乃相當於

“若 $x_1 \neq x_2$, 則 $f(x_1) \neq f(x_2)$” (1)

亦相當於

“若 $f(x_1) = f(x_2)$, 則 $x_1 = x_2$” (2)

註: 若一函數滿足 (1) 或 (2), 則稱此函數爲一對一函數 (one-to-one (1-1) function).

結論:

$f : A \to B$ 是 1-1 且值域爲 $f(A)$ 則, f 有反函數

$$f^{-1} : f(A) \to A$$

且定義如下:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x),\, y \in f(A)$$

如圖 7 所示.

註 1. f^{-1} 的定義域爲 f 的值域; f^{-1} 的值域爲 f 的定義域.

註 2. 相反的效果:

- $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$
  因爲對任一 $x \in A$,
  $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$
- $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$
  因爲對任一 $y = f(x) \in f(A)$,
  $f^{-1}(y) = x$ 且 $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

如圖 8.

註 3. Q1. 如何檢測 f 是 1-1?

Q2. 若 f 是 1-1, 如何求 f^{-1}?

A1. 方法一: 由定義檢查 f 是否滿足:

$$\text{“}x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\text{”}$$

或

$$\text{“}f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\text{”}$$

方法二: 水平線檢測法:

f 爲 1-1 $\Leftrightarrow$ 每一條水平線最多只與 f 的圖形相交於一點.

如,

- $y = x^3$: 1-1 函數, 如圖 9.
- $y = x^2$: 不是 1-1 函數, 如圖,10.

但適當地修正定義域就可得 1-1 的函數, 如

(1) 令 $f_1(x) = x^2, x \geq 0$: 1-1 函數, 如圖 11.

(2) 令 $f_2(x) = x^2, x \leq 0$: 1-1 函數, 如圖 12.

A2. 以例說明:
試求

$$f(x) = x^3 + 1,\ x \geq 0$$

的反函數.
<解>

(i) f: 1-1, 因爲根據 f 的圖形, 圖 13,

可由水平線檢測法得證.

(ii) 令 $y = f(x)$, 解 x:

$$\begin{aligned} & y = x^3 + 1,\ y \geq 1 (\text{ 因爲 } x \geq 0) \\ \Rightarrow\ & x^3 = y - 1,\ y \geq 1 \\ \Rightarrow\ & x = \sqrt[3]{y-1},\ y \geq 1 \end{aligned}$$

故,

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1},\, y \geq 1$$

(iii) x 與 y 互換:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}, x \geq 1$$

(效果: f 與 f^{-1} 的圖形對稱於直線 $y = x$)

如圖 14.

(vi) 對數函數 (Logarithmic Functions):

指數函數 a^x (為 1-1) 的反函數稱作以 a 為底數的對數函數, 並以

$$\log_a x$$

表示之, 也即, a^x 與 $\log_a x$ 互為反函數.

性質：

1. $\log_a x : (0, \infty) \to R$
   (因為 $a^x : R \to (0, \infty)$)

2. $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$ 且 $\log_a a^x = x$, $x \in R$

3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

5. $\log_a x^r = r\log_a x$

註:

1. 自然指數 e^x 的反函數稱作自然對數, 並以

$$\ln x$$

表示之 (亦即 $\ln x = \log_e x$).

2. 換底公式:

$$a^x = e^{x\ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

爲何如此?

<證> 首先

$$\begin{aligned} a^x &= e^{\ln a^x} \\ &= e^{x\ln a} \end{aligned}$$

接著, 令

$$y = \log_a x \quad (1)$$

由定義知

$$a^y = x$$

兩邊取 ln, 得

$$\ln a^y = \ln x$$

根據對數函數的性質, 化簡得

$$y \ln a = \ln x$$

所以,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (2)$$

由 (1) 與 (2), 得

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(根據換底公式, 可由自然對數與自然指數函數的性質, 推導出其他底數的指數與對數函數的性質)

3. 自然指數 e^x 與自然對數 $\ln x$ 的圖形, 如圖 15 所示, 顯示出互爲反函數的特性.

例.

(a) 試化簡下列各式:

$\log_2(x^2-4)$
$\log_3 9^x$
$\ln e^{3x^2-1}$

(b) 試將下列各式換成以 e 爲底數:
10^{x^2+5}
$\log_6 x$
$\log_2(3x-1)$

<解>

(a)

$$\begin{aligned}\log_2(x^2-4) &= \log_2(x+2)(x-2)\\ &= \log_2(x+2)+\log_2(x-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_3 9^x &= \log_3(3^2)^x\\ &= \log_3 3^{2x} = 2x\end{aligned}$$

$$\ln e^{3x^2-1} = 3x^2-1$$

(b)

$$\begin{aligned}10^{x^2+5} &= \exp\left(\ln(10^{x^2+5})\right)\\ &= \exp\left((x^2+5)\ln 10\right)\end{aligned}$$

$$\log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

$$\log_2(3x-1)=\frac{\ln(3x-1)}{\ln 2}$$

(vii) 三角函數 (Trigonometric Functions):

定義. f 的週期 (period) a: 對所有的 $x\in f$ 的定義域, 使得 $f(x+a)=f(x)$ 的最小正數 a.

如,

1. $\sin x:(-\infty,\infty)\to[-1,1]$, 週期 $=2\pi$, 如圖 16.

2. $\cos x:(-\infty,\infty)\to[-1,1]$, 週期 $=2\pi$, 如圖 17.

3. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}:(-\infty,\infty)\backslash\frac{n\pi}{2},n:$ 奇整數 $\to(-\infty,\infty)$, 週期 $=\pi$, 如圖 18.

4. $\csc x=\frac{1}{\sin x}:(-\infty,\infty)\backslash n\pi$, $n:$ 整數 $\to(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, 週期 $=2\pi$, 如圖 19.

5. $\sec x=\frac{1}{\cos x}:(-\infty,\infty)\backslash\frac{n\pi}{2}$, $n:$ 奇整數 $\to(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, 週期 $=2\pi$, 如圖 20.

6. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} : (-\infty, \infty) \backslash n\pi$, n : 整數 $\to (-\infty, \infty)$, 週期 $= \pi$, 如圖 21.

註: 設

$$f(x) = a\sin(kx),\ x \in R$$

其中 $a > 0$ 且 $k \neq 0$, 則稱 a 爲振幅 (amplitude) (因爲函數的值介於 $-a$ 與 a 之間)

問. 週期 $p =?$ $\Leftrightarrow$ 求最小的 p 使得

$$f(x+p) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a\sin(k(x+p)) = a\sin(kx) \\
&\Leftrightarrow \quad a\sin(kx+kp) = a\sin(kx)
\end{aligned}$$

所以,

$$kp = 2\pi$$

(因爲 2π 是 sin 函數的週期). 故,

$$p = \frac{2\pi}{k}$$

如, $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, 則 f 之振幅 $= 3$, 週期

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

(或由 $\frac{\pi}{4}p = 2\pi$, 而得 $p = 8$)

如圖 22.

註一. 一數爲代數數 (algebraic): 若此數是以有理數作爲係數的多項式方程式的解. 如,

$$\sqrt{2}$$

因爲 $\sqrt{2}$ 是有理數係數多項式方程式

$$x^2 - 2 = 0$$

的解. 另外

$$1$$

也是一個代數數, 因爲 1 是有理數係數多項式方程式

$$x - 1 = 0$$

的解, . . . 等等.

一數爲超越數 (transcendental): 非代數數. 如,

$$e$$

$$\pi$$

註二. 一函數 $y = f(x)$ 爲代數函數 (algebraic): 若 $y = f(x)$ 爲下列型式的方程式的解

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0$$

其中 $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ 均爲以有理數爲係數的多項式函數. 如,

$$y = \frac{1}{1+x}$$

因爲 y 爲方程式

$$\overbrace{(1+x)}^{P_1(x)}y \overbrace{-1}^{P_0(x)} = 0$$

的解. 又

$$y = 5x^2 - 3.2x + 7$$

也是一個代數函數, 因爲 y 爲方程式

$$\overbrace{y}^{P_1(x)=1} - \overbrace{(5x^2 - 3.2x + 7)}^{P_0(x)} = 0$$

的解. 再舉例,

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

也是一個代數函數, 因爲 y 爲方程式

$$\overbrace{(1-x)}^{P_1(x)}y - \overbrace{(1+x)}^{P_0(x)} = 0$$

的解.

一函數 $y = f(x)$ 爲超越函數 (transcendental): 非代數函數 (algebraic function), 如:

三角函數

指數函數

對數函數

應用 (以例說明):

例 1. 設某一化學反應如下:

$$\underbrace{A+B}_{\text{反應物 (reactants)}} \longrightarrow \overbrace{AB}^{\text{產品 (product)}}$$

(表示: A 分子 $+$ B 分子結合成 AB 分子)

在一密閉的容器內進行. 若反應速率 (rate of reaction) 符合質量運動律 (law of mass action): 反應速率與反應物的濃度 (concentrations) 的乘積成比例, 其中濃度 (concentration) = 固定體積內的分子數. 試以數學式子描述反應速率 (rate of reaction).

<解> 令 $[A]$, $[B]$ 與 $[AB]$ 分別表示 A, B 與 AB 的濃度. 設最初濃度 (initial concentrations) 如下:

$$[A] = a,\ [B] = b,\ [AB] = 0$$

令 $R =$ 反應速率 (rate of action). 由質量運動律 (law of mass action) 知,

$$R \propto [A]\,[B] \Leftrightarrow R = k\,[A]\,[B]$$

其中 $k > 0$ 爲一比例因子 (proportionality factor).

因爲 $[A]$, $[B]$ 與 $[AB]$ 的關係如下: 當產品數 $[AB] = x$ 時,

$$[A] = a - x,\ [B] = b - x$$

且

$$0 \le x \le \min(a, b)$$

其中 $\min(a, b)$ 表示 a 與 b 中的最小值. 因此,

$$R(x) = k(a - x)(b - x),\ 0 \le x \le \min(a, b)$$

其中 x 爲產品數.

討論: 由

$$R(x) = kx^2 - k(a + b)x + kab$$

(一個 2 次多項式) 的圖形, 如圖 23, 顯示出:

- 速率 (rate) $R(x)$ 隨著 $x\uparrow$ 而 $\downarrow$.

- $x=0$ 時, $R(x)$ 最大 (因爲此時 A 與 B 的分子最多.)

- $x=\min(a,b)$ 時, $R(x)=0$ (因爲其中 A 或 B 的分子用完了, 不再產生反應.)

例 2. 冪函數 (power functions) 常用來描述生物變數 (biological variables) 與組織大小 (organic sizes) 之間的 "測量尺度關係 (scaling relation)". 如觀察 45 種單細胞藻類 (unicellular algae) 後, 將每一種的 (細胞體積, 細胞生物量) ((cell volume, cell biomass)) 描點後, 經統計方法可得

$$\text{細胞生物量} \propto (\text{細胞體積})^{0.794}$$

(或更明確地, $y=3x^{0.794}$, 其中 x 爲細胞體積 , y 爲細胞生物量.)

如圖 24: 由統計方法找出與描點之間誤差最小的曲線, 又稱作最配合資料點的曲線.

例 3. 試求一立方體 (cube) 的表面積 S 與體積 V 之間的測量尺度關係 (scaling relation).
<解> 引進另一變數 L: 立方體的邊長, 則

$$S \propto L^2 (\Leftrightarrow S = k_1 L^2) \quad (3)$$
$$V \propto L^3 (\Leftrightarrow V = k_2 L^3) \quad (4)$$

由 (4) 式解 L 並代入 (3) 式, 得

$$L = \left(\frac{V}{k_2}\right)^{1/3}$$

且

$$\begin{aligned} S &= k_1 \left[\left(\frac{V}{k_2}\right)^{1/3}\right]^2 \\ &= \frac{k_1}{k_2^{2/3}} V^{2/3} \end{aligned}$$

所以,

$$S = kV^{2/3}$$

或

$$S \propto V^{2/3}$$

應用: 又問若體積增為 2 倍時, S 的變化為何?
透過上式有關表面積與體積的關係, 新的表面積

$$\begin{aligned} S' &= k(2V)^{2/3} \\ &= 2^{2/3}kV^{2/3} \\ &= 2^{2/3}S \end{aligned}$$

所以, 表面積增為原先的 $2^{2/3}$ (≈ 1.587) 倍.

例 4. 指數增長 (exponential growth): 設某種細菌經過單位時間後會分裂繁殖, 且 $N(t) =$ 在 t 時的族群大小或母體大小 (population size), 則

$$N(t+1) = 2N(t),\ t \geq 0 \tag{5}$$

問 $N(t) =$?
<解> 設 $N(0) = N_0$ (=initial population size). 觀察:

$$N(1) = 2N(0) = 2N_0$$

$$N(2) = 2N(1) = 2^2N_0$$

$$N(3) = 2N(2) = 2 \cdot 2^2N_0 = 2^3N_0$$

$$\vdots$$

推論:

$$N(t) = 2^t N_0 \tag{6}$$

驗證: 由式 (6) 得,

$$\begin{aligned} N(t+1) &= 2^{t+1} N_0 \\ &= 2 \cdot 2^t N_0 \\ &= 2N(t) \end{aligned}$$

故, 式 (5) 成立. 所以,

$$N(t) = N_0 2^t,\ t \geq 0$$

(一底數爲 2 的指數函數)

例 5. 放射性衰退 (radioactive decay):
活植物: 吸收 $CO_2 \Rightarrow$
C^{14} 與 C^{12} 的比例和大氣中的比例相同
死植物: 停止吸收 $CO_2 \Rightarrow$
C^{14} 退化且 C^{14} 與 C^{12} 的比例下降

所以根據比例下降的多少, 以及退化的物理定律, 可在考古學上用來做年代的推算. 舉例說明如下:

(i) 放射性退化律 (law of radioactive decay): 令

$$W_0 = C^{14} \text{ 的最初含量 } (= W(0))$$

$$W(t) = \text{ 在 } t \text{ 時 } \mathsf{C}^{14} \text{ 的含量}$$

則

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t},\ t \geq 0$$

其中 $\lambda > 0$, 稱作退化率 (decay rate).

註: 通常以半生期 (half-life: 物質退化到一半的含量, 所需的時間) T_h 來表示 λ, 推導過程如下: 根據半生期的定義,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W_0 &= W(T_h) \\ &= W_0 e^{-\lambda T_h} \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_h}$$

兩邊取 ln:

$$\begin{aligned} -\ln 2 &= \ln(e^{-\lambda T_h}) \\ &= -\lambda T_h \end{aligned}$$

所以,

$$\lambda T_h = \ln 2$$

或

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_h}$$

或

$$T_h = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

因此，只要知道 C^{14} 的半生期 = 5730 年, 則退化律 (decay rate)

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730\,年}$$

(ii) 下降的比例: 設某一考古區挖出的木頭樣本中, C^{14} 的含量是活樹的 23%, 問此樹是何時死亡?

<解> 定義時間座標如圖 25: 設活樹死亡的時刻爲時間 0, 此時 C^{14} 的含量 W_0 = 活樹中 C^{14} 的含量; 現在挖出的時刻爲時間 t, 此時 C^{14} 的含量爲 $W(t)$. 由題意知,

$$\frac{W(t)}{W_0} = 0.23$$

又根據放射性退化律

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$$

所以, 由上二式得

$$\begin{aligned} 0.23 &= \frac{W_0 e^{-\lambda t}}{W_0} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

化簡得,

$$e^{\lambda t} = \frac{1}{0.23}$$

因此,

$$\lambda t = \ln\left(\frac{1}{0.23}\right)$$

所以,

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1}{0.23}\right) \\ &= \frac{5730\,\text{年}}{\ln 2}\ln\left(\frac{1}{0.23}\right) \\ &\approx 12150\,\text{年} \end{aligned}$$

(因爲 C^{14} 的 $\lambda = \ln 2/(5730\,\text{年})$)