單元 22: 定積分
(課本 §6.1)

一. 面積

問. 若 $a > 0$, $f(x) = x^2$ 在 $[0, a]$ 上所圍成 (出) 區域的面積爲何?

構想: 將 $[0, a]$ 區間 n 等分後,

- 每一子區間 (subinterval) 的長度 $= \frac{a}{n}$
- 在每一子區間上以左端點的函數值爲高, 可形成 n 個長方形

則

$$\text{面積} \approx n \text{ 個長方形的面積和}$$

且

$$n \text{ 愈大 (亦即, 分的愈細) 愈準確}$$

如圖示. 所以,

$$
\begin{aligned}
\text{面積} &\approx S_n \\
&\stackrel{\text{def}}{=} f(0)\frac{a}{n} + f\left(\frac{a}{n}\right)\frac{a}{n} + \cdots + f\left((n-1)\frac{a}{n}\right)\frac{a}{n} \\
&= \left[0^2 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{2^2a^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2a^2}{n^2}\right]\frac{a}{n} \\
&= \left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right]\frac{a^3}{n^3} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

接著, 根據平方和的公式:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} i^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 \\
&= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)
\end{aligned}
$$

以及 (1) 式, 代 $k = n-1$, 得

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)\frac{a^3}{n^3} \\
&= \frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\text{面積} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{3}
\end{aligned}
$$

註 1. 有限和的累加符號 (sigma notation):

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

如,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2n+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) \\ &\overset{\text{或}}{=} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \end{aligned}$$

$$x+2x^2+\cdots+nx^n=\sum_{k=1}^{n} kx^k$$

註 2. 運算規則:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 項}}=n$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (因爲常數 c 與 k 無關)

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

如,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left[2\left(\frac{k}{n}\right)+1\right]\frac{1}{n} &= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}+1\right)\right] \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n}\cdot n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)+1 = 2+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k-2) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-4) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4n
\end{aligned}$$

二. 黎曼積分 (Riemann Integrals, 面積問題的推廣)

令函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續.

分割 (partition) $[a,b]$ 成 n 個子區間 (subintervals, 不一定等長), 如圖示, 並將此分割表示成

$$P=[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

則第 k 個子區間 $[x_{k-1},x_k]$ 的長度為

$$x_k-x_{k-1}\overset{\text{記成}}{=}\Delta x_k,\ \ k=1,2,\ldots,n$$

令

$$\begin{aligned}\|P\| &= \text{最長的子區間長度}\\ &= \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_k\}\end{aligned}$$

稱作 P 的模方 (範數, norm of P).

針對 $1\le k\le n$, 任選一

$$c_k\in[x_{k-1},x_k]$$

並建構以

$$\Delta x_k \text{ 為底, } |f(c_k)| \text{ 為高的長方形}$$

則

$$f(c_k)\Delta x_k=\begin{cases}\text{長方形面積}, & \text{若 } f(c_k)>0\\ \text{-(長方形面積)}, & \text{若 } f(c_k)<0\end{cases}$$

定義. f 在閉區間 $[a, b]$ 上的黎曼和 (Riemann sum)

$$S_P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

如圖示, “分的愈細, 長方形的總和愈能與 f 圍出的區域吻合”.

問. 當 $\|P\| \to 0$ (亦即, 分的愈細) 時, $S_P \to$?

思考: 因爲 S_n 是 S_P 的一個特例, 所以若

$$S_P \to L$$

則在 $f > 0$ 時,

$$S_n \to L$$

剛好就是 f 圍出區域的面積. 因此, 當 $f > 0$ 時, S_P 的極限就是 f 所圍出區域的面積. 若是一般的 f, 如何稱 S_P 的極限? 又何時 S_P 的極限會存在?

定義. 令

$$P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

爲閉區間 $[a, b]$ 的一個分割且

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

以及

$$c_k \text{ 是在 } [x_{k-1}, x_k] \text{ 內的任一點}$$

則 f 由 a 到 b 的定積分 (definite integral)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|P\|\to 0} S_P \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k\end{aligned}$$

當極限存在時, 並稱 f 在閉區間 $[a, b]$ 上是 (黎曼) 可積的 (Riemann integrable).

註 1. 極值存在相當於要求所有使得 $\|P\| \to 0$ 的分割 P 以及所有任選的點 c_k 都會使得

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P$$

存在.

註 2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S_P$ 存在可導出 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在且二者相等, 因爲 S_n 是 S_P 的一個特例.

註 3. 符號說明:

- $\int$ 稱作積分符號 (integral sign).
- $f(x)$ 稱作被積函數 (integrand).
- a 與 b 表示由 a 到 b 的積分且分別稱爲下 (積分) 極限 (lower limit) 與上 (積分) 極限 (upper limit).
- dx 表示自變數爲 x 且針對 x 的範圍, 愈分愈細.

註 4. 何時保證極限存在? 也就是說, 在註 1 說明的如此強烈的要求下, 對應的黎曼和的極限存在.

定理. 若函數 f 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 則

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

存在.

如, 第一例

$$\int_3^7 (x^2-1)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2-1)\triangle x_k$$

存在, 對任意分割

$$P : x_0 = 3 < x_1 < \cdots < x_n = 7$$

滿足

$$\|P\| \to 0$$

以及任意點

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k]\,,\ \ k = 1, \ldots, n$$

都需符合極限的要求, 此乃因爲被積函數 x^2-1 在閉區間 $[3,7]$ 上連續所致.

第二例

$$\int_2^4 \sqrt{x-1}dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k-1}\triangle x_k$$

也存在, 對任意分割

$$P : x_0 = 2 < x_1 < \cdots < x_n = 4$$

滿足

$$\|P\| \to 0$$

以及任意點

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k], \ k = 1, \ldots, n$$

都需符合極限的要求, 也是因為被積函數 $\sqrt{x-1}$ 在閉區間 $[2,4]$ 上連續之故.

最後一例

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 dx &= \lim_{\|P\|\to 0} S_P \text{ (因為 } x^2 \text{ 在 } [0,2] \text{ 上連續)} \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \text{ (因 } S_n \text{ 是 } S_p \text{ 的一特例)} \\ &= \left.\frac{a^3}{3}\right|_{a=2} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

註 5. 定積分的幾何意義

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \text{在區間 } [a,b] \text{ 上, } f \text{ 的圖型與 } x\text{-軸所} \\ &\quad\ \text{圍出區域的符號面積 (signed area)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A_+ - A_-\end{aligned}$$

其中

$$A_+ = \text{ 在 } x\text{-軸之上的區域面積和}$$

$$A_- = \text{ 在 } x\text{-軸之下的區域面積和}$$

如圖示,

$$\Sigma_1 = \sum f(c_k)\Delta x_k \to R_1 \text{ 的面積}$$

且

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum f(c_k)\Delta x_k \\ &= -\sum\left[-f(c_k)\right]\Delta x_k \to -\left[R_2 \text{ 的面積}\right]\end{aligned}$$

以及

$$\Sigma_3 = \sum f(c_k)\Delta x_k \to R_3 \text{ 的面積}$$

所以,

$$\begin{aligned}S_P &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \\ &\to (R_1 \text{ 與 } R_3 \text{ 的面積和}) - (R_2 \text{ 的面積和}) \\ &= A_+ - A_-\end{aligned}$$

因此,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} S_P = A_+ - A_-$$

註. 符號面積 (singed area) 可正可負. 當 $f \geq 0$ 時, 符號面積等於眞正的面積.

例 1. 試由定積分的幾何意義求下列各值.

(a) $\int_{-2}^{3}(2x+1)dx$

(b) $\int_{0}^{2\pi}\sin x dx$

(c) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

(d) $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)dx$

(e) $\int_{0}^{1}\sqrt{2-x^2}dx$

<解> (a) 繪圖後, 根據定積分的幾何意義得知

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3}(2x+1)dx &= A_+ - A_- \\ &= R_2 \text{ 的面積} - R_1 \text{ 的面積} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{49}{4}-\frac{9}{4}=10\end{aligned}$$

(b) 繪圖後得知, R_1 與 R_2 有相同的面積且分別在 x-軸的上下, 故

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin x dx &= A_+ - A_- \\ &= R_1 \text{ 的面積} - R_2 \text{ 的面積} \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) 繪圖後得知, 欲求面積的區域爲一個在 x-軸之上的半圓, 故

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx &= A_+ - A_- \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi(2)^2 - 0 \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

(d) (解法一) 很明顯地, 函數的圖形爲 (c) 中的半圓向下平移 2, 故所圍出的區域完全在 x-軸之下. 因此, 根據定積分的符號面積意義,

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{2} \left(\sqrt{4-x^2} - 2\right) dx \\ &= A_+ - A_- \\ &= 0 - \left[4 \cdot 2 - \frac{1}{2}\pi(2)^2\right] \\ &= 2\pi - 8\end{aligned}$$

(解法二) 根據下一節的黎曼積分性質,

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}-2\right)dx\\
&\qquad=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx-\int_{-2}^{2}2dx\\
&\qquad=\text{半圓面積}\ -\ \text{長方形面積}\\
&\qquad=\pi(2)^2/2-4\cdot 2\\
&\qquad=2\pi-8
\end{aligned}$$

(e) 根據被積函數的圖形以及積分的上下極限, 可得所圍出的區域全在 x-軸之上且是一等腰直角三角形 (腰長爲 1) 和一扇形 (半徑爲 $\sqrt{2}$, 夾角爲 45°) 的組合. 因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{1}\sqrt{2-x^2}dx\\
&\qquad=\text{三角形的面積}\ +\ \text{扇形的面積}\\
&\qquad=\frac{1}{2}(1)(1)+\frac{1}{8}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2\\
&\qquad=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

三. 黎曼積分的性質

設函數 f 與 g 在閉區間 $[a,b]$ 上均可積.

(1) 約定

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

此乃因爲寬度爲 0 的區域面積等於 0.

(2) 約定

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

此乃因爲針對閉區間 $[a, b]$, $\int_b^a f(x)dx$ 表示由右往左分割, 故由子區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 所導出的

$\Delta x_k =$ 左端點 $-$ 右端點 $= x_{k-1} - x_k = (-)$

然而, $\int_a^b f(x)dx$ 表示由左往右分割, 故由子區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 所導出的

$\Delta x_k =$ 右端點 $-$ 左端點 $= x_k - x_{k-1} = (+)$

因而各自的黎曼和之間差一個負號所致.

(3) 若 k 爲一常數, 可提出純量積的常數, 得

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

(4) 針對加減運算, 可逐項積分:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx \\ = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

(5) 針對積分範圍 $[a, b]$, 可做分解的運算, 而產生對應積分的加法運算:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

情況 1. c 在 $[a, b]$ 內. 由圖形得知,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= R_1 \text{ 的面積} + R_2 \text{ 的面積} \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\end{aligned}$$

情況 2. c 在 $[a, b]$ 外. 由圖形得知,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= R_1 \text{ 的面積} + R_2 \text{ 的面積} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\end{aligned}$$

接著, 由上式以及性質 (2) 可導出

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx - \left(-\int_c^b f(x)dx\right) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\end{aligned}$$

(6) 若 $f(x) \geq 0$, 則

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

因爲當 $f \geq 0$ 時,

$$\int_a^b f(x)dx = \text{所圍出區域的面積}$$

故不爲負.

(7) 若 $f(x) \leq g(x)$, 則

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

僅考慮 f 與 g 均大於 0 的特例時, f 所圍出的區域在 g 所圍出的區域內, 故得證.

(8) 若 $m \leq f(x) \leq M$, 則

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

僅以 $m > 0$ 的特例說明, 此時, 高度爲 m 的長方形在 f 所圍出的區域內, 而 f 所圍出的區域又在高度爲 M 的長方形內, 故得證.

例 2. 給定

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

試求

$$\int_1^4 (3x^2+2)dx$$

<解> 根據逐項積分以及提出純量積中的純量的性質,

$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x^2+2)dx &= \int_1^4 3x^2 dx + \int_1^4 2dx \\ &= 3\int_1^4 x^2 dx + \int_1^4 2dx \quad (2)\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\int_1^4 2dx &= \text{高爲 } 2, \text{ 寬爲 } 3 \text{ 的長方形面積} \\ &= 2\cdot 3 = 6 \qquad (3)\end{aligned}$$

接著, 根據積分範圍可分解的性質, 積分極限互換的約定以及假設條件,

$$\begin{aligned}\int_1^4 x^2dx &= \int_1^0 x^2dx + \int_0^4 x^2dx \\ &= -\int_0^1 x^2dx + \int_0^4 x^2dx \\ &= -\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{3}(4)^3 \\ &= \frac{1}{3}(63) \qquad (4)\end{aligned}$$

最後, 合併 (2)-(4) 式, 得

$$\begin{aligned}\int_1^4 (3x^2+2)dx &= 3\cdot\frac{1}{3}(63)+6 \\ &= 69\end{aligned}$$

例 3. 試求正數 a 使得

$$\int_0^a (1-x^2)dx$$

爲最大.

<解> 當 $x>0$ 時, 被積函數的圖形是一開口向下, 在第一與第四象限內的拋物線, 且與 x-軸相交於 $(1,0)$. 因此, 由圖形知, 可分別探討下列兩種情況.

情況 1. 若 $a < 1$, 則

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx &= \text{圍出區域的面積}\\ &< \text{在 } [0,1] \text{ 上圍出區域的面積}\\ &= \int_0^1 f(x)dx \qquad (5)\end{aligned}$$

情況 2. 若 $a > 1$, 則

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx &= A_+ - A_-\\ &= \int_0^1 f(x)dx - A_-\end{aligned}$$

又因爲 $A_- > 0$, 故得

$$\int_0^a f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx \qquad (6)$$

最後, 合併 (5) 式與 (6) 式, 得 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 時,

$$\int_0^a (1-x^2)dx < \int_0^1 (1-x^2)dx$$

故

$$\int_0^1 (1-x^2)dx$$

爲最大, 亦即,

$$a = 1$$

例 4. 求 $a > 0$ 使得

$$\int_{-a}^{a} (|x| - 1)\, dx = 0$$

<解> 由圖得知, 圖形對稱於 y-軸, 所以,

“積分 = 0”

相當於

“在 y-軸右邊, 位於 x-軸之下所圍出的區域面積 = 位於 x-軸之上所圍出的區域面積”

也就是說,

$$\frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}(a-1)(a-1)$$

因此,

$$a = 2$$