單元 21: 反導函數
(課本 §5.8)

微分方程式: 一般的型式如下

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ 且當 } x = x_0 \text{ 時, } y = y_0$$

它的解 $\Leftrightarrow$ 找滿足上式的 y, 亦即, 找 y 使得

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ 且 } y(x_0) = y_0$$

如,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{ 且當 } t = 0 \text{ 時, } N = 20 \qquad (1)$$

的解爲

$$N(t) = \sqrt{t} + 20$$

爲何如此? 因爲將上式微分, 得

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2}t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

且

$$N(0) = 20$$

因此, (1) 式成立.

問. 如何求解?

微分 (differentiation): 給定 $F(x)$, 求

$$F'(x) \overset{\text{記成}}{=} f$$

解微分方程式: 給定 $F'(x) = f$, 找 F, 也就是說, 找一導函數爲 f 的函數 F. 稱此過程爲反微分 (antidifferentiation).

微分與反微分互爲相反的運算, 如圖示.

定義. F 稱作 f 的反導函數若且爲若

$$F'(x) = f(x)$$

因此, 在此定義下, 解微分方程式

$$F' = f$$

就相當於

$$\text{找 } f \text{ 的反導函數 } F$$

問. 如何求反導數?

舉例, 若

$$f(x) = 3x^2,\ x \in R$$

則

$$F(x) = x^3,\ x \in R$$

是 $f(x) = 3x^2$ 的反導函數, 因為

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$$

另外,

$$x^3 + 5\ \left(\text{因為 } \frac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2\right)$$

$$x^3 - 1$$

$$\vdots$$

事實上,

$$x^3 + C,\ C \text{ 為一常數}$$

都是 (亦即, 經過垂直平移後的都是).

因此, 反導函數不只一個且它們的差異是一個常數.

這是全部的反導數嗎? 答案是肯定的, 如下面的推理所述.

推理 3. 若 $F(x)$ 與 $G(x)$ 同爲 $f(x)$ 的反導函數, 則

$$G(x) = F(x) + C,\ C \text{ 爲一常數}$$

註. 此推理乃暗示 (imply, 指示, 導出) 只要找到一個反導函數 F, 則所有其它的反導函數都是

$$F(x) + C,\ C \text{ 爲任一常數}$$

<證> 因爲 F 與 G 同爲 f 的反導函數, 故它們都是可微的且導函數同爲 f. 因此, $G(x) - F(x)$ 亦是可微的且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[G(x) - F(x)] &= G'(x) - F'(x)\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

亦即, $G(x) - F(x)$ 的導函數恆爲 0. 所以, 由均值定理 (MVT) 的推論 2, 知

$$G(x) - F(x) = C$$

因此,

$$G(x) = F(x) + C$$

求反導函數的一些規則:

1. 函數:

$$Kf(x)$$

特殊的反導函數:

$$KF(x)$$

因爲

$$\frac{d}{dx}[KF(x)] = K\frac{d}{dx}F(x) = Kf(x)$$

2. 函數:

$$f(x)+g(x)$$

特殊的反導函數:

$$F(x)+G(x)$$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[F(x)+G(x)] &= F'(x)+G'(x)\\ &= f(x)+g(x)\end{aligned}$$

3. 函數:

$$x^n,\ n \neq -1$$

特殊的反導函數:

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

因為

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right] &= \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n \\ &= x^n \end{aligned}$$

4. 函數:

$$\frac{1}{x}$$

特殊的反導函數:

$$\ln|x|$$

因為 $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

且 $x < 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

故, 合併上二式, 對所有的 $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

5. 函數:

$$e^{ax}$$

特殊的反導函數:

$$\frac{1}{a}e^{ax}$$

因爲

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right) = \frac{1}{a}e^{ax}\cdot a = e^{ax}$$

6. 函數:

$$\sin(ax)$$

特殊的反導函數:

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)$$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right) &= -\frac{1}{a}\cdot\left(-\sin\left(ax\right)\cdot a\right)\\ &= \cos\left(ax\right)\end{aligned}$$

7. 函數:

$$\cos(ax)$$

特殊的反導函數:

$$\frac{1}{a}\sin(ax)$$

因爲

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin ax\right) = \frac{1}{a}\cdot\cos(ax)\cdot a = \cos(ax)$$

8. 函數:

$$\sec^2(ax)$$

特殊的反導函數:

$$\frac{1}{a}\tan(ax)$$

因爲

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan(ax)\right) &= \frac{1}{a}\cdot\sec^2(ax)\cdot a\\ &= \sec^2(ax)\end{aligned}$$

例 1. 試求下列函數的一般反導函數 (general antiderivative).

(a) $f(x) = 4x^7 + 5x - 3$

(b) $f(x) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 7\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

(d) $f(x) = e^{5x} + \dfrac{x}{x+1}$

<解> (a) 根據求反導函數的規則 1 與 2, 可以略過純量積並逐項求個別函數的反導函數, 故

$$\begin{aligned} F(x) &= 4\cdot\frac{1}{8}x^8 + 5\cdot\frac{1}{2}x^2 - 3x + C \\ &= \frac{1}{2}x^8 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

(b) 根據 sin 函數與 cos 函數的反導函數公式,

$$\begin{aligned} F(x) &= 5\cdot\frac{-2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 7\cdot\frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + C \\ &= \frac{-10}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{21}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + C \end{aligned}$$

(c) 因為原式與 $1/x$ 很像, 只在分母差一個純量和, 而純量和並不影響導函數, 故直覺的猜測為

$$F(x) = \ln|1+x| + C$$

驗證: 根據

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

以及連鎖法則,

$$\frac{d}{dx}\ln|1+x| = \frac{1}{1+x}\cdot(1+x)' = \frac{1}{1+x}$$

所以, 確實

$$F(x) = \ln|1+x| + C$$

(d) 原式中一項為指數函數, 故可根據指數函數的反導函數公式求之, 而另一項與前一小題很類似, 這暗示可先化簡再找出適當的求法. 因此, 經過化簡,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{5x} + \frac{x+1-1}{x+1} \\ &= e^{5x} + 1 - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

所以, 很明顯地, 逐項根據所需的對應公式和前小題的結果,

$$F(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + x - \ln|x+1| + C$$

註. 若函數爲

$$f(x)=\frac{1}{1+ax}$$

亦即, 與 $1/x$ 的分母差一個純量和以及一個純量積. 因爲會影響導函數的是純量積, 故特殊反導函數的直覺猜測爲

$$F(x)=\frac{1}{a}\ln|1+ax|$$

驗證: 根據

$$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$$

以及連鎖法則

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+ax}\cdot(1+ax)' \\
&= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+ax}\cdot a \\
&= \frac{1}{1+ax}
\end{aligned}$$

所以, 確實

$$\frac{1}{1+ax}$$

的一般反導函數爲

$$\frac{1}{a}\ln|1+ax|+C$$

想想看:

$$\frac{1}{k+ax},\ \ k,\ a \text{ 均爲常數}$$

的反導函數爲何?

例 2. 試求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2} - 2x^2 + \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

的一般解 (general solution).

<解> 令 $f(x)$ 爲等號右邊的函數, 則原問題 (解微分方程式) 相當於找 $f(x)$ 的一般反導函數. 所以,

$$\begin{aligned} y &= 3\cdot(-1)x^{-1} - 2\cdot\frac{1}{3}x^3 + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ &= -\frac{3}{x} - \frac{2}{3}x^3 + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

初始值問題 (initial value problem):

相當於求滿足初始值條件 (即, 當 $x = x_0$, 時 $y = y_0$) 的微分方程式的解, 其解是唯一的且稱作特殊解 (particular solution).

例 3. 試解初始值問題:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^2 + 3,\ x \in R$$

且

$$當\ x = 3\ 時,\ y = 10$$

<解> 先求一般解, 此乃相當於求

$$f(x) = -2x^2 + 3$$

的反導函數. 故,

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x + C\ (一般解)$$

接著, 代入初始值

$$x = 3,\ y = 10$$

並解 C, 得

$$10 = -\frac{2}{3}(3)^3 + 3(3) + C$$

整理後,

$$10 + 18 - 9 = C$$

所以,

$$C = 19$$

因此, 特殊解為

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 3x + 19,\ x \in R$$