單元 14: 反函數與對數函數的導函數
(課本 §4.7)

一. 反函數的導函數

設函數 f 爲一對一 (1-1) 且 $f^{-1}(x)$ 爲 f 的反函數, 則對於 $x \in \{f^{-1}$ 的定義域$\} = \{f$ 的值域$\}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

將上式兩邊對 x 微分, 得

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}(x)$$

接著, 根據連鎖規則,

$$f'(f^{-1}(x))\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1$$

所以, 當

$$f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

時,

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{1}$$

亦即, 反函數的導函數與原函數的導函數呈顛倒數關係.

註. 萊布尼茲符號 (Leibniz notation):

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

所以, 根據 (1) 式,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \end{aligned}$$

更明確地由符號呈現出顛倒數的關係.

例 1. 令

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \ x \geq 0$$

試求 $\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 與 $\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

<解> (a) 由反函數的導函數公式,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

接著需要求出 $f'(x)$ 以及 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 並將其代入 $f'(x)$ 中.

首先,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[1-(x+1)^{-1}\right] \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

又

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

此乃因為 $f(1)=\frac{1}{2}$. 所以,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{(1+1)^2}}=4 \end{aligned}$$

(b) 因為 $f'(x)$ 在 (a) 小題已求出, 根據反函數的導函數公式, 僅需求 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. 過程如下: 令

$$x=f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

由反函數的定義，上式相當於

$$f(x)=\frac{1}{3}$$

亦即，

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{3}$$

解之，得

$$3x=x+1$$

故，

$$x=f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

所以，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

例 2. 令

$$f(x) = 2x + e^x,\ x > 0$$

試求 $\frac{d}{dx}f^{-1}(1)$.

<解> 首先,

$$f'(x) = 2 + e^x$$

又

$$f(0) = 2(0) + e^0 = 1$$

由此得,

$$f^{-1}(1) = 0$$

因此, 根據反函數的導函數公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f^{-1}(1) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{2 + e^0} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

例 3. 令

$$f(x) = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

則

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,\infty)$$

的圖形如下. 根據水平線檢定法, 得知 f 爲一對一函數. 因此, 定義 f 的反函數

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &\overset{\text{def}}{=} \tan^{-1}x \\ &\overset{\text{或}}{=} \operatorname{arctan}x:(-\infty,\infty)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

試求 $\frac{d}{dx}\operatorname{arctan}x$.

<解> 因爲

$$\tan(\tan^{-1}x)=x$$

所以, 兩邊對 x 微分, 得

$$\frac{d}{dx}\tan(\tan^{-1}x)=\frac{d}{dx}(x)$$

再根據連鎖規則以及 tan 函數的微分公式, 得

$$\sec^2\left(\tan^{-1}x\right)\cdot\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=1$$

所以,

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{\sec^2\left(\tan^{-1}x\right)}$$

接著根據三角恆等式 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, 上式相當於

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan^{-1} x &= \frac{1}{1+\tan^2\left(\tan^{-1} x\right)}\\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因爲 $\tan(\tan^{-1} x) = x$.

例如,

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(1) = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{2}$$

例 4. 令

$$f(x) = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

則

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

的圖形如下. 故根據水平檢定法得知, f 爲一對一函數.
因此, 定義 f 的反函數

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) &\overset{\text{def}}{=} \sin^{-1} x\\ &\overset{\text{或}}{=} \arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

試求 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x$.

<解> 直接使用反函數的導函數公式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^{-1}x &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1\end{aligned}$$

第四個等式成立是因爲當 $\sin^{-1}x\in[-\pi/2,\pi/2]$ 時, $\cos(\sin^{-1}x)>0$ 且 $\cos^2x=1-\sin^2x$ 所致.

注意. 最後一個等式顯示 $\sin^{-1}x$ 可微的範圍是 $-1<x<1$, 不含兩端點, 而此二點卻是 $\sin^{-1}$ 有定義的地方. 此乃因爲在此二點時, 由第三式知, 分母爲

$$\cos(\sin^{-1}(1))=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

且

$$\cos(\sin^{-1}(-1))=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

故需除去此二點. 或由圖形可看出在此二點的切線爲鉛直線, 故不可微.

若不記得反函數的導函數公式, 可採用此單元一開始時使用的方法, 也就是例 3 的方法, 根據反函數的定義, 得

$$\sin(\sin^{-1} x) = x$$

接著兩邊對 x 微分, 並由連鎖規則, 得

$$\cos\left(\sin^{-1} x\right) \cdot \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = 1$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^{-1} x &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1} x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1\end{aligned}$$

舉例,

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

二. 對數函數的導函數

定理. 自然對數以及底數爲 a 的對數函數的導函數如下:

(1) $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$

註. 以 a 爲底數的指數函數的導函數

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)a^x$$

乃乘上一個常數 $\ln a$, 而其反函數的導函數爲除以常數 $\ln a$.

<證> (1) 首先根據反函數的定義,

$$e^{\ln x} = x$$

接著兩邊對 x 微分, 並運用連鎖規則以及指數函數的微分公式, 得

$$e^{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x = 1$$

解之, 得

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(2) 由換底公式,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

接著, 根據自然對數的微分公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log_a x &= \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln x \\ &= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} \end{aligned}$$

註. 一個常用到的對數合成函數的導函數公式:

$$\frac{d}{dx}\ln\left[f(x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

爲何如此? 直接由連鎖規則, 先對 ln 微分, 得 $\frac{1}{x}$ 並將 $f(x)$ 代入, 再乘上 $f'(x)$, 故

$$\frac{d}{dx}\ln\left[f(x)\right] = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

例 5. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \ln\sqrt[3]{x^2+1}$

(b) $f(x) = \sin(\ln(3x))$

(c) $y = \ln(\ln t)$

(d) $y = \log_5 \left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

<解> (a) 根據對數函數的化簡公式, 先將 y 改寫成

$$y = \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$

再根據連鎖規則以及對數函數的微分公式或上述的註解,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' \\ &= \frac{2x}{3(x^2+1)} \end{aligned}$$

(b) f 爲兩次的合成函數, 故使用兩次連鎖規則以及對應函數的微分公式, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\ln(3x)) \cdot \frac{d}{dx}\ln(3x) \\ &= \cos(\ln(3x))\frac{1}{3x} \cdot (3x)' \\ &= \cos(\ln(3x))\frac{1}{x} \end{aligned}$$

(c) 因爲 y 爲一對數合成函數, 故由連鎖規則,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\ln t}\cdot\frac{d}{dt}\ln t\\
&= \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\\
&= \frac{1}{t\ln t}
\end{aligned}
$$

(d) 先化簡 y, 得

$$y=\log_5 x-\log_5(x+1)$$

此乃避免在運用連鎖規則時, 要採用較複雜的除法規則對

$$\frac{x}{x+1}$$

微分. 接著逐項微分, 得

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\ln 5}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln 5}\frac{1}{x+1}\\
&= \frac{1}{\ln 5}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)
\end{aligned}
$$

三. 對數微分 (Logarithmic Differentiation)

三類函數的微分過程, 分述如下.

(1) $y=[f(x)]^n$, 亦即 y 爲一函數的 n 次方. 故根據廣義冪次規則 (也就是連鎖規則加冪次規則), 得

$$\frac{dy}{dx}=n\,[f(x)]^{n-1}\,f'(x)$$

(2) $y=a^{f(x)}$, 亦即 y 爲常數 a 的函數次方 (也就是底數爲 a 的指數函數與 $f(x)$ 的合成函數). 故根據連鎖規則與指數函數的微分公式,

$$\frac{dy}{dx}=(\ln a)a^{f(x)}f'(x)$$

(3) $y=[f(x)]^{g(x)}$, 亦即 y 爲一函數的函數次方, 與前面的兩類不同, 故不可採用前面所提的方法, 也就是說

$$\frac{dy}{dx}\neq g(x)\,[f(x)]^{g(x)-1}\,f'(x)$$

以及

$$\frac{dy}{dx}\neq \ln(f(x))\,[f(x)]^{g(x)}\,g'(x)$$

問. $\dfrac{dy}{dx}$ 爲何?

答. 需透過含三個步驟的對數微分 (logarithmic differentiation):

(i) 兩邊取對數並化簡

(ii) 對 x 微分

(iii) 解 $\frac{dy}{dx}$

舉例說明如下.

例 6. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = x^x$

(b) $y = (\sin x)^x$

<解> (a) 因爲原函數爲一函數的函數次方, 故根據對數微分的三個步驟, 得

(i) 兩邊取 ln:

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

(ii) 對 x 微分 (視 y 爲 x 的函數):

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln x$$

(iii) 解 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = (1 + \ln x)x^x$$

(b) 同 (a), y 爲一函數的函數次方, 故使用對數微分, 得

$$\ln y = x \ln(\sin x)$$

以及 (兩邊對 x 微分, 視 y 爲 x 的函數)

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= (1)\ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x}\cos x \\ &= \ln(\sin x) + x \cot x\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y\left[\ln(\sin x) + x \cot x\right] \\ &= \left[\ln(\sin x) + x \cot x\right](\sin x)^x\end{aligned}$$

應用: 簡化含乘, 除, 次方項的式子的微分.

例 7. 試求

$$y = \frac{e^x x^{3/2}\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4(3x-2)^3}$$

的 $\frac{dy}{dx}$.

<解> 避免直接微分時, 會面對乘法, 除法, 冪次規則等繁雜的微分過程, 可採用對數微分, 將乘積, 相除, 次方的部分改寫成加, 減以及乘積的形式, 而化簡微分的過程.

首先兩邊取對數 ln 並化簡, 得

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln e^x + \ln x^{3/2} + \ln(\sqrt{1+x}) - \\ &\qquad \ln(x^2+3)^4 - \ln(3x-2)^3 \\ &= x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \\ &\qquad 4\ln(x^2+3) - 3\ln(3x-2)\end{aligned}$$

接著兩邊對 x 微分 (視 y 爲 x 的函數), 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} - \\ &\qquad 4\frac{2x}{x^2+3} - 3\frac{3}{3x-2}\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = y\left[1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{8x}{x^2+3}-\frac{9}{3x-2}\right]$$
$$= \frac{e^x x^{3/2}\sqrt{1+x}}{(x^2+3)^4(3x-2)^3}\cdot$$
$$\left[1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2(1+x)}-\frac{8x}{x^2+3}-\frac{9}{3x-2}\right]$$

例 8. (冪次規則). 令 r 爲任一實數. 試證

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

<證> 令 $y = x^r$. 根據對數微分, 得

$$\ln y = r\ln x$$

以及

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = r\frac{1}{x}$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = r\frac{1}{x}\cdot y = r\frac{1}{x}\cdot x^r = rx^{r-1}$$