單元 11: 連鎖規則與高階導函數
(課本 §4.4)

一. 連鎖規則 (Chain Rule). 設 g 在 x 可微且 f 在 $g(x)$ 可微, 則

(i) $f \circ g$ 在 x 可微且

(ii) $(f \circ g)'(x) = f'\left[g(x)\right] g'(x)$

註 1. $(f \circ g)'(x) =$ (f 的導函數在 $g(x)$ 的值) $\times$ (g 的導函數在 x 的值)

註 2. 萊布尼茲表示法 (Leibniz notation): 令

$$u = g(x)$$

則

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

乃一方便於記憶的表示法, 如圖示.

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $h(x) = (2x+1)^3$

(b) $y = \sqrt{x^2+1}$

<解> (a) 令 $u = g(x) = 2x+1$, $f(u) = u^3$. 則

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

所以, 根據連鎖規則,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= 3(2x+1)^2(2) \\ &= 6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

或使用萊布尼茲符號

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3u^2 \cdot 2 \\ &= 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2 \end{aligned}$$

(b) 令 $u = g(x) = x^2+1$ 且 $f(u) = \sqrt{u}$. 則

$$y = (f \circ g)(x)$$

所以, 根據連鎖規則,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f'(g(x))g'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

或採用萊布尼茲符號

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(2x)\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

<連鎖規則的證明> 由導函數的定義, 需證明

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(c) &= \lim_{x\to c}\frac{f\left[g(x)\right]-f\left[g(c)\right]}{x-c}\\ &= f'(g(c))g'(c)\end{aligned}$$

分別考慮兩種情況如下:

情況 1. 當 $x\to c$ 時, $g(x)\neq g(c)$. 因爲

$$g(x)-g(c)\neq 0$$

所以, 可同時除, 乘一非零的 $g(x)-g(c)$, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{x-c}\\
=\;& \lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
=\;& \lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
& \text{(若兩個極限均存在時)}\\
=\;& \lim_{g(x)\to g(c)}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}\cdot\\
& \lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
& \text{(因爲 } g \text{ 在 } c \text{ 可微} \Rightarrow g \text{ 在 } c \text{ 連續, 故}\\
& \lim_{x\to c} g(x)=g(c)\\
& \text{亦即, } x\to c\Rightarrow g(x)\to g(c))\\
=\;& f'(g(c))g'(c)\\
& \text{(因爲 } f \text{ 在 } g(c) \text{ 及 } g \text{ 在 } c \text{ 均可微)}
\end{aligned}$$

情況 2. 當 $x\to c$ 時, 若有些 $g(x)=g(c)$. 令

$$y=g(x),\ d=g(c)$$

因爲 f 在 $d=g(c)$ 可微, 所以

$$\lim_{y\to d}\frac{f(y)-f(d)}{y-d}=f'(d)=f'(g(c))$$

存在. 因此, 定義

$$f^*(g(x)) = \begin{cases} \frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)} & \text{若 } g(x) \neq g(c) \\ f'(g(c)) & \text{若 } g(x) = g(c) \end{cases} \quad (1)$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f^*(g(x)) &= \begin{cases} \lim_{x\to c} \frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)} & \text{若 } g(x) \neq g(c) \\ \lim_{x\to c} f'(g(c)) & \text{若 } g(x) = g(c) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim_{y\to d} \frac{f(y)-f(d)}{y-d} & \text{若 } g(x) \neq g(c) \\ f'(g(c)) & \text{若 } g(x) = g(c) \end{cases} \\ &= f'(g(c)) = f^*(g(c)) \end{aligned}$$

因此, $f^*(g(x))$ 在 $x = c$ 連續.

由 (1) 知, 對所有的 x (不論 $g(x) \neq g(c)$ 或 $g(x) = g(c)$),

$$f^*(g(x))[g(x) - g(c)] = f(g(x)) - f(g(c)) \quad (2)$$

爲何如此? 當 $g(x) \neq g(c)$ 時, 很明顯地由 (1) 式得知. 當 $g(x) = g(c)$ 時,

$$\text{左邊} = f'(g(c))[g(c) - g(c)] = 0$$

且

$$\text{右邊} = f(g(c)) - f(g(c)) = 0$$

因此, 根據 (2) 式,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{x-c}\\
= \;& \lim_{x\to c} f^*(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
= \;& \lim_{x\to c} f^*(g(x))\cdot\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
= \;& f^*(g(c))g'(c)\\
& (\text{因為 } f^*(g(x)) \text{ 在 } c \text{ 連續})\\
& (\text{以及 } g \text{ 在 } c \text{ 可微})\\
= \;& f'(g(c))g'(c)\\
& (\text{根據 (1) 式 } f^*(g(x)) \text{ 的定義})
\end{aligned}$$

註 1. 廣義冪次規則 (general power rule). 若 $y = [g(x)]^n$, 則

$$\frac{dy}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

<證> 令

$$u = g(x),\;\; f(u) = u^n$$

則

$$y = (f \circ g)(x)$$

由連鎖規則,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \\ &= nu^{n-1}g'(x) \\ &= n[g(x)]^{n-1}g'(x) \end{aligned}$$

註 2. 除法規則 (quotient rule) 的證明. 欲證

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

因爲

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)(g(x))^{-1}$$

故, 由乘法規則 (product rule) 與廣義冪次規則 (general power rule), 得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \\ &= \frac{d}{dx}(f(x))[g(x)]^{-1} + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]^{-1} \\ &= f'(x)[g(x)]^{-1} + f(x)(-1)[g(x)]^{-2}g'(x) \\ &= [g(x)]^{-2}[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] \end{aligned}$$

例 2. 試求下列各項的導函數.

(a) $f(x) = (x^2 - 7)^4 (x + 5x^2)^{-5}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[7]{2x^2 + 3x}}$

(c) $h(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$

<解> (a) 因爲原函數爲兩個函數的次方的乘積, 故先使用乘法規則再使用廣義冪次規則, 可得

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{d}{dx}(x^2-7)^4\right] \cdot (x+5x^2)^{-5} + \\
&\qquad (x^2-7)^4 \cdot \left[\frac{d}{dx}(x+5x^2)^{-5}\right] \\
&= 4(x^2-7)^3(2x) \cdot (x+5x^2)^{-5} - \\
&\qquad 5(x^2-7)^4(x+5x^2)^{-6}(1+10x) \\
&= (x^2-7)^3(x+5x^2)^{-6} \cdot \\
&\qquad \left[8x(x+5x^2) - 5(1+10x)(x^2-7)\right] \\
&= \frac{(x^2-7)^3(-10x^3+3x^2+350x+35)}{(x+5x^2)^6}
\end{aligned}$$

(b) 將原函數改寫成函數的次方, 並用廣義冪次規則, 得

$$g(x) = (2x^2 + 3x)^{-1/7}$$

以及

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{7}(2x^2+3x)^{-8/7}(4x+3) \\ &= -\frac{4x+3}{7(2x^2+3x)^{8/7}} \end{aligned}$$

(c) 直接使用廣義冪次規則, 可得

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)' \\ &= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left[1-(x+1)^{-1}\right] \\ &= 3\frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot (x+1)^{-2} \\ &= \frac{3x^2}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

例 3. 試求

$$f(x) = \left(2x^3 - \sqrt{3x^4-2}\right)^3$$

的導函數.

<解> 因為 $f(x)$ 為函數的 3 次方, 且裡面的部分亦有一項為函數的 1/2 次方, 故需使用兩次廣義冪次規則, 而得

$$\begin{aligned}
&f'(x)\\
&= 3\left(2x^3-\sqrt{3x^4-2}\right)^2\cdot\left(2x^3-\sqrt{3x^4-2}\right)'\\
&= 3\left(2x^3-\sqrt{3x^4-2}\right)^2\cdot\\
&\qquad\left(6x^2-\frac{1}{2}\left(3x^4-2\right)^{-1/2}\cdot 12x^3\right)\\
&= 3\left(2x^3-\sqrt{3x^4-2}\right)^2\left(6x^2-\frac{6x^3}{\sqrt{3x^4-2}}\right)\\
&= 18x^2\left(2x^3-\sqrt{3x^4-2}\right)^2\left(1-\frac{x}{\sqrt{3x^4-2}}\right)
\end{aligned}$$

例 4. 設 $f'(x)=3x-1$. 試求

$$\frac{d}{dx}f(x^2)\Big|_{x=3}$$

<解> 被微分的函數是 f 與 x^2 的合成函數, 故根據連鎖規則,

$$\frac{d}{dx}f(x^2)=f'(x^2)\cdot 2x$$

再將 $x = 3$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x^2)\Big|_{x=3} &= (2)(3)f'(9)\\ &= (6)[3(9)-1]\\ &= (6)(26)\\ &= 156\end{aligned}$$

二. 隱函數 (Implicit Function) 與隱微分 (Implicit Differentiation).

自變數 x 與應變數 y 的關係通常可以用二種方式表示:

(i) 明確地 (explicitly): $y = f(x)$, 如

$$y = (x^2+1)^3$$

由此可導出

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x)$$

(ii) 隱藏地, 不明確地 (implicitly): $F(x, y) = 0$, 如

$$y^5x^2 - yx + 2y^2 = \sqrt{x}$$

問. $\dfrac{dy}{dx}$ 爲何?

隱微分 (implicit differentiation): 一種求隱藏關係下的導函數的方法, 含如下的二步驟.

步驟 **1.** 將方程式兩邊對 x 微分並視 y 爲 x 的函數.

步驟 **2.** 針對步驟 1 的結果, 解 $\frac{dy}{dx}$.

例 5. 若 $x^2 + y^2 = 1$, 試求 $\frac{dy}{dx}$.

<解> (i) 兩邊對 x 微分 (視 y 爲 x 的函數), 得

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

根據廣義冪次規則, 上式相當於

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

(ii) 解 $\frac{dy}{dx}$: 將含 $\frac{dy}{dx}$ 的各項移至等號左邊並合併, 同時將其餘各項移至等號右邊, 可得

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

例 6. 若 $y^3x^2 - yx + 2y^2 = x$, 試求 $\frac{dy}{dx}$.

<解> (i) 兩邊對 x 微分 (視 y 爲 x 的函數), 得

$$\frac{d}{dx}(y^3x^2) - \frac{d}{dx}(yx) + 2\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

根據乘法規則與廣義冪次規則, 上式相當於

$$3y^2\frac{dy}{dx}\cdot x^2 + y^3\cdot 2x - \frac{dy}{dx}\cdot x - y\cdot 1 + 2\cdot 2y\frac{dy}{dx} = 1$$

(ii) 解 $\frac{dy}{dx}$: 將含 $\frac{dy}{dx}$ 的各項移至等號左邊並合併, 同時將其餘各項移至等號右邊, 可得

$$(3y^2x^2 - x + 4y)\frac{dy}{dx} = 1 + y - 2xy^3$$

所以,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y - 2xy^3}{3y^2x^2 - x + 4y}$$

例 7. 試證: 若 r 爲一有理數, 則

$$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$$

<證> 令有理數

$$r = p/q$$

其中 p, q 爲二整數, 且

$$y = x^{p/q}$$

則兩邊取 q 次方, 得

$$y^q = x^p$$

因爲當 p, q 爲整數時, 已證過冪次規則成立, 故根據隱微分的方法, 兩邊對 x 微分 (視 y 爲 x 的函數), 得

$$\frac{d}{dx}(y^q) = \frac{d}{dx}(x^p)$$

上式又相當於

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

所以, 解 $\frac{dy}{dx}$, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = rx^{r-1}$$

三. 相關變化率 (Related Rates).

設 y, x 爲二量, 其關係以 $y = f(x)$ (明確方式) 或 $F(x, y) = 0$ (隱藏方式) 表示之, 且 y, x 分別又隨著時間 t 而改變 (亦即, $y = y(t)$, $x = x(t)$).

相關變化率 (related rates) 的問題 $\Leftrightarrow$ 已知一量的變化率 (如, $\frac{dx}{dt}$), 問另一量 (如, $\frac{dy}{dt}$) 的變化率爲何? 舉例說明如下.

例 8. 設 $x^2 + y^3 = 1$ 且當 $x = \sqrt{\frac{7}{8}}$ 時, $\frac{dx}{dt} = 2$. 問. $\frac{dy}{dt}$ 爲何?

<解> 因爲 y 與 x 和 t 的關係都是隱藏的, 故基本的解法是使用隱微分, 含如下的三個步驟.

(i) 兩邊對 t 隱微分 (視 x, y 爲 t 的函數), 得

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^3) = \frac{d}{dt}(1)$$

實際微分後, 可推導出

$$2x\frac{dx}{dt} + 3y^2\frac{dy}{dt} = 0$$

(ii) 解 $\frac{dy}{dt}$, 得

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{x}{y^2}\frac{dx}{dt}$$

(iii) 求 y 並將相關值代入上式. 當 $x = \sqrt{\frac{7}{8}}$,

$$y^3 = 1 - x^2\Big|_{x=\sqrt{7/8}} = 1 - \left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

所以,

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{7/8}}{1/4}(2)\\ &= -\frac{16}{3}\sqrt{7/8}\\ &= -\frac{16}{3}\sqrt{14/16}\\ &= -\frac{4}{3}\sqrt{14}\end{aligned}$$

例 9. 將空氣注入一圓形氣球內, 當半徑 $r = 6$ (英吋) 時, 半徑以 2 (英吋/秒) 的速度增加. 問此時體積的變化如何?

<解> 上例中, 題目給出了兩個量之間的關係, 此例需要先自行找出二量 (即, 半徑與體積) 之間的關係.

(i) 列出體積 V 與半徑 r 的關係式, 得

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(ii) 兩邊對 t 隱微分 (視 V, r 爲 t 的函數), 得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}(r^3)$$

實際微分後, 可推導出

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

(iii) 已知 $r = 6$ (英吋) 且 $\frac{dr}{dt} = 2$ (英吋/秒). 所以,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\pi(6)^2 \text{ 英吋}^2 \cdot 2 \text{ 英吋/秒} \\ &= 288\pi \text{ 英吋}^3\text{/秒} \end{aligned}$$

例 10. 設某海中的爬蟲類其頭蓋骨長度 (skull length) 與脊椎長度 (backbone length) 的關係式爲

$$[\text{頭蓋骨長度}] = 1.162\,[\text{脊椎長度}]^{0.933}$$

問脊椎成長率 (growth rate) 與頭蓋骨成長率間的關係如何?

<解> 設 x 爲此爬蟲類的年齡. 因爲頭蓋骨長度與脊椎長度都隨著年齡而改變, 故可假設 $S(x)$ 爲年齡 x 的頭蓋骨長度, 且 $B(x)$ 爲年齡 x 的脊椎長度. 則根據題意,

$$S(x) = 1.162B(x)^{0.933}$$

所以, 兩邊對 x 微分後, 可得變化率的關係式

$$\begin{aligned} \frac{dS(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[1.162B(x)^{0.933}\right] \\ &= 1.162(0.933)B(x)^{0.933-1}\frac{dB(x)}{dx} \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{dS(x)}{dx} = \underbrace{1.162B(x)^{0.933}}_{S(x)}(0.933)\frac{1}{B(x)}\frac{dB(x)}{dx}$$

因此, 頭蓋骨的相對成長率 (relative growth rate)

$$\frac{1}{S(x)}\frac{dS(x)}{dx} = 0.933\left(\frac{1}{B(x)}\frac{dB(x)}{dx}\right)$$

亦即, 0.933 倍的脊椎相對成長率.

註. 此處是以相對成長率來描述成長率間的關係.

因爲 $0.933 < 1$, 所以頭蓋骨的成長率小於脊椎的成長率. 由此可推論出, 年幼的脊椎動物其頭蓋骨與身長的相對大小 (比例) 會比成年的大.

四. 高階導函數 (Higher Derivatives).

給定函數 $f(x)$,

一階導函數 (1st derivative):

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

二階導函數 (2nd derivative):

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

三階導函數 (3rd derivative):

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}[f''(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$$

$$\vdots$$

n 階導函數 (nth derivative):

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)$$

例 11. 試求下列各項的二階導函數.

(a) $g(t) = \sqrt{3t^2 + 2t}$

(b) $x^2 + y^2 = 1$ (求 $\frac{d^2y}{dx^2}$)

<解> (a) 首先, 將原函數改寫爲

$$g(t) = (3t^2 + 2t)^{1/2}$$

並求一階導函數 (根據廣義冪次規則), 得

$$g'(t) = \frac{1}{2}(3t^2 + 2t)^{-1/2}(6t + 2)$$

接著, 再微分 $g'(t)$ 並化簡, 可得

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt}\Big(g'(t)\Big) \\ &= -\frac{1}{4}(3t^2 + 2t)^{-3/2}(6t + 2)^2 + \\ &\qquad\qquad \frac{1}{2}(3t^2 + 2t)^{-1/2}(6) \\ &= \frac{-(3t + 1)^2 + 3(3t^2 + 2t)}{(3t^2 + 2t)^2} \\ &= \frac{-1}{t^2(3t + 2)^2} \end{aligned}$$

(b) 因爲 x 與 y 的關係不是明確地表示出, 故需先對 x 隱微分, 以求出 $\frac{dy}{dx}$, 得

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

解之, 得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

然後再將上式兩邊對 x 隱微分並根據除法規則, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{-x}{y}\right] \\
&= \frac{(-1)y - (-x)\frac{dy}{dx}}{y^2} \\
&= \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} \\
&= -\frac{y^2 + x^2}{y^3} \\
&= -\frac{1}{y^3}
\end{aligned}$$

其中根據題意 $x^2 + y^2 = 1$, 故最後一個等號成立.

註. 只有純量積規則與加減法規則可先求出導函數後, 再

作對應的運算, 即

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

以及

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

故針對純量積及加減法運算, 可逐項微分. 但其它的運算, 則不可先微分後再作對應的運算, 即

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

與

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

以及

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))$$

此外, 使用連鎖規則時, 切勿代入內部函數的導函數, 即

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g'(x))g'(x)$$

註. 連鎖規則的推廣: 三個可微函數合成的導函數, 可經

由重複的連鎖規則, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(g(h(x)))] &= f'(g(h(x)))\frac{d}{dx}[g(h(x))] \\ &= f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\end{aligned}$$

令 $v = h(x)$, $u = g(v)$, $y = f(u)$, 得

$$y = f(u) = f(g(v)) = f(g(h(x)))$$

以及連鎖規則的萊布尼茲表示法

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[f(g(h(x)))] \\ &= f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \\ &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx} \\ &\overset{\text{或}}{=} \frac{df}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

同理, 可類推出多個可微函數合成的連鎖規則.