期末練習題解答(109下)

1. 首先, 在點 $(1,6)$ 的梯度向量

$$\nabla f(1,6) = \left[\begin{array}{c} \frac{y-4x}{2\sqrt{xy-2x^2}} \\ \frac{x}{2\sqrt{xy-2x^2}} \end{array}\right]\Bigg|_{(1,6)} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

接著, 由點 $(1,6)$ 朝向點 $(-1,11)$ 的方向向量爲

$$\left[\begin{array}{c} -1-1 \\ 11-6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -2 \\ 5 \end{array}\right]$$

正規化, 即同除長度 $\sqrt{29}$, 得單位向量

$$\mathbf{u} = \left[\begin{array}{r} -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} \end{array}\right]$$

因此, 方向導數

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1,6) &= (\nabla f(1,6)) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{r} -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} \end{array}\right] = \frac{1}{4\sqrt{29}} \end{aligned}$$

根據梯度向量的性質, 與梯度向量反向時, f 遞減最多, 即朝向 $\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{array}\right]$ 時, f 減少最快.

2. 根據梯度向量的性質, 在點 (x, y) 的方向 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 需與梯度向量

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 2y-4 \end{bmatrix}$$

同方向, f 才會增加最快, 即有相同的斜率

$$\frac{2y-4}{2x-2} = \frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

且有相同的分量符號, 即 $2x-2>0$. 整理得

$$y-2 = x-1,\ y = x+1; \quad x > 1$$

即

$$\{(x,y) | y = x+1, x > 1\}$$

3. 因爲

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ye^{-y}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x(1-y)e^{-y}$$

均連續, 故 f 可微且僅需解 $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 即

$$\begin{aligned} ye^{-y} &= 0 \\ x(1-y)e^{-y} &= 0 \end{aligned}$$

得唯一臨界點 $(0,0)$. 接著, 二階偏導函數爲

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{-y}) = 0$$

與

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[x(1-y)e^{-y}] = -x(2-y)e^{-y}$$

且

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[x(1-y)e^{-y}] = (1-y)e^{-y}$$

以及判別式

$$\begin{aligned} D(x,y) &= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ &= 0[-x(2-y)e^{-y}] - [(1-y)e^{-y}]^2 \\ &= -(1-y)^2 e^{-2y} \end{aligned}$$

代 $(0,0)$, 得 $D(0,0)=-1<0$, 故 f 在 $(0,0)$ 無相對極值且 $(0,0,f(0,0))=(0,0,0)$ 爲一鞍點.

或 Hessian 矩陣

$$\text{Hess}\, f(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & (1-y)e^{-y} \\ (1-y)e^{-y} & -x(2-y)e^{-y} \end{bmatrix}$$

其中二階偏導函數均連續. 代入臨界點, 得

$$\text{Hess}\, f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因爲

$$\det \text{Hess}\, f(0,0)=\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=-1<0$$

故 f 在 $(0,0)$ 無相對極值且 $(0,0,0)$ 爲一鞍點.

4. 因爲

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\cos x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sin x$$

均連續, 故 f 可微且僅需解 $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

即

$$\begin{aligned} y\cos x &= 0 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}$$

得

$$x = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \quad y = 0$$

即臨界點 $(k\pi, 0), k \in \mathbf{Z}$. 又 Hessian 矩陣

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} -y\sin x & \cos x \\ \cos x & 0 \end{bmatrix}$$

其中二階偏導函數均連續. 代入臨界點, 得

$$\begin{aligned} &\det \operatorname{Hess} f(k\pi, 0) \\ = &\begin{cases} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & k: \text{偶數} \\ \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & k: \text{奇數} \end{cases} \\ = & -1 < 0 \end{aligned}$$

故 f 在 $(k\pi, 0)$ 無相對極值且 $(k\pi, 0, 0), k \in \mathbf{Z}$ 爲鞍點.

5. 因爲 f 連續且定義域

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2-x\}$$

爲一有界封閉三角形區域，根據極值定理，存在全面極值.

先求內部臨界點. 因爲

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y - 2xy - y^2$$

與

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x - x^2 - 2xy$$

均連續，故 f 可微且僅需解 $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,
即

$$\begin{aligned} y(2-2x-y) &= 0 \\ x(2-x-2y) &= 0 \end{aligned}$$

因爲求內點，僅需解

$$\begin{aligned} 2-2x-y &= 0 \\ 2-x-2y &= 0 \end{aligned}$$

也就是

$$2x + y = x + 2y, \quad x = y, \quad x = y = \frac{2}{3}$$

得唯一內部臨界點 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 且

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27} \end{aligned}$$

接著求邊界臨界點. 因爲

$$f(x,y)=2xy-x^2y-xy^2=xy(2-x-y)$$

在邊界

$$C_1=\{(x,0):0\le x\le 2\}$$

與

$$C_2=\{(x,2-x):0\le x\le 2\}$$

以及

$$C_3=\{(0,y):0\le y\le 2\}$$

上, $f(x,y)=0$, 一常數函數, 故所有邊點均是臨界點.

比較, 得 f 在內點 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 有全面最大值 $\frac{8}{27}$ 且在所有邊點有全面最小值 0.

6. 因爲

$$\frac{\partial Y(N,P)}{\partial N} = (1-N)Pe^{-(N+P)}$$

與

$$\frac{\partial Y(N,P)}{\partial P} = N(1-P)e^{-(N+P)}$$

均連續, 故 Y 可微且僅需解

$$\nabla Y(N,P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} (1-N)Pe^{-(N+P)} &= 0 \\ N(1-P)e^{-(N+P)} &= 0 \end{aligned}$$

由第一式得

$$N = 1, \quad P = 0$$

代入第二式, 得對應的

$$P = 1, \quad N = 0$$

即一個內部臨界點 $(1,1)$ 與一個邊點 $(0,0)$ 且

$$Y(1,1) = e^{-2}$$

另在邊界

$$C_1 = \{(N,0) : N \geq 0\}$$

與

$$C_2 = \{(0, P) : p \geq 0\}$$

上 $Y(N,P) = 0$ 且在無窮遠 (無界邊界) 時,

$$\begin{aligned} &\lim_{N \text{ 或 } P \to \infty} Y(N,P) \\ &= \lim_{N \text{ 或 } P \to \infty} NPe^{-(N+P)} = 0 \end{aligned}$$

比較, 得農產量在內點 $(1,1)$ 有全面最大值 e^{-2}.

7. 標準化限制條件, 得

$$g(x,y) = x^2 + 3y - 1 = 0$$

且

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2$$

與

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 3$$

均連續, 所以根據 Lagrange 定理, 需解聯立方程式

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \quad g(x,y) = 0$$

即

$$\begin{aligned} 2xy &= 2\lambda x \\ x^2 &= 3\lambda \\ x^2 + 3y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

由 “第一式”$\times$ 3 $-$ “第二式” $\times$ $2x$, 得

$$6xy - 2x^3 = 2x(3y - x^2) = 0$$

即

$$x = 0; \quad x^2 = 3y$$

代入第三式, 得對應的

$$y=\frac{1}{3};\quad y=\frac{1}{6},\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

即 3 個候選點

$$\left(0,\frac{1}{3}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{6}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{6}\right)$$

且

$$f\left(0,\frac{1}{3}\right)=0,\quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$$

因為限制條件乃一拋物線, 無界的, 故需考慮在無窮遠 (無界邊界) 時的行為. 代入限制條件

$$y=\frac{1}{3}(1-x^2),\ x\in\mathbf{R}$$

得 $f(x,y)=x^2y$ 等價於

$$h(x)=\frac{1}{3}x^2(1-x^2),\ x\in\mathbf{R}$$

且

$$\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=-\infty$$

比較, 得 f 在 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{6}\right)$ 有全面受限最大值 $\frac{1}{12}$, 無全面受限最小值. 又

$$h'(0)=\frac{1}{3}(2x-4x^3)\Big|_{x=0}=0$$

且

$$h''(0) = \frac{1}{3}(2 - 12x^2)\Big|_{x=0} > 0$$

上凹, 故 h 在 $x = 0$, 即 f 在候選點 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 有局部受限極小值 0.

8. 標準化限制條件, 得

$$g(x,y)=x^2-y^2-1=0$$

且

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy^2,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x^2y$$

與

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=-2y$$

均連續, 故根據 Lagrange 定理, 需解

$$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y),\quad g(x,y)=0$$

即

$$\begin{aligned} 2xy^2&=2\lambda x\\ 2x^2y&=-2\lambda y\\ x^2-y^2-1&=0 \end{aligned}$$

由 "第一式" $\times\ y$ $+$ "第二式" $\times\ y$, 得

$$2xy^3+2x^3y=2xy(x^2+y^2)=0$$

即 $x=0$ 或 $y=0$. 當 $x=0$, 由第三式, 無對應的 y. 當 $y=0$, 由第三式, 得對應的 $x=-1$ 與 $x=1$, 即 2 個候選點

$$(-1,0),\quad (1,0)$$

且

$$f(-1,0)=0, \quad f(1,0)=0$$

因爲限制條件是一無界的雙曲線, 需考慮在無窮遠 (無界邊界) 的行爲. 代入限制條件

$$x^2=y^2+1,\ y\in\mathbf{R}$$

得 $f(x,y)=x^2y^2$ 等價於

$$h(y)=(y^2+1)y^2,\ y\in\mathbf{R}$$

且

$$\lim_{y\to\pm\infty} h(y)=\infty$$

比較, 得 f 在 $(-1,0)$ 與 $(1,0)$ 有全面受限最小值 0, 無全面受限最大值.

9. 首先, 得線性系統的係數矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

接著, 求 A 的特徵值, 即解

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (4-\lambda)(-5-\lambda) + 14 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \end{aligned}$$

得二特徵值

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

根據定義, $\lambda_1 = 2$ 對應的特徵向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}$$

即

$$\begin{aligned} 4u_1 - 7u_2 &= 2u_1 \\ 2u_1 - 5u_2 &= 2u_2 \end{aligned}$$

等價於

$$2u_1 = 7u_2$$

取 $u_1 = 7$, $u_2 = 2$, 得特徵向量

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

同理, $\lambda_2 = -3$ 對應的特徵向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{v} = -3\mathbf{v}$$

即

$$\begin{aligned} 4v_1 - 7v_2 &= -3v_1 \\ 2v_1 - 5v_2 &= -3v_2 \end{aligned}$$

等價於

$$v_1 = v_2$$

取 $v_1 = v_2 = 1$, 得特徵向量

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根據重疊原理, 一般解爲

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v} \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 c_1 與 c_2 爲任意的二常數.

最後, 代初始條件 $x_1(0) = 13$, $x_2(0) = 3$, 得

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} 7c_1 + c_2 &= 13 \\ 2c_1 + c_2 &= 3 \end{aligned}$$

二式相減並代回第一或第二式, 得

$$5c_1 = 10, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -1$$

因此, 特殊解爲

$$\mathbf{x}(t) = 2e^{2t} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10. 由題意, 得線性系統的係數矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

根據特徵值的定義, 需解

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (-\lambda)(1-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$

得二特徵值

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$$

根據定義, $\lambda_1 = 3$ 對應的特徵向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$$

即

$$\begin{aligned} -3u_2 &= 3u_1 \\ -2u_1 + u_2 &= 3u_2 \end{aligned}$$

相當於

$$u_2 = -u_1$$

取 $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, 得特徵向量

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

同理, $\lambda_2 = -2$ 的特徵向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$$

即

$$\begin{aligned} -3v_2 &= -2v_1 \\ -2v_1 + v_2 &= -2v_2 \end{aligned}$$

等價於

$$3v_2 = 2v_1$$

取 $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, 得特徵向量

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

根據重疊原理, 一般解爲

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

其中 c_1 與 c_2 爲任意的二常數.

因爲 $\det A = -6 \neq 0$ 且特徵值一正, 一負, 得唯一的平衡點 $(0, 0)$ 爲一鞍點.

11. 首先，令

$$\frac{dx}{dt} = v$$

得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

且可將二階微分方程式轉換一階微分方程式線性系統

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= 2x - v \end{aligned}$$

以及係數矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

接著，解

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$

得二特徵值

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

針對 $\lambda_1 = 1$, 對應的特徵向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

即

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \\ 2u_1 - u_2 &= u_2 \end{aligned}$$

等價於

$$u_1 = u_2$$

故取 $u_1 = u_2 = 1$, 得特徵向量

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

針對 $\lambda_2 = -2$, 對應的特徵向量 $\mathbf{v} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 需滿足

$$A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$$

即

$$\begin{aligned} v_2 &= -2v_1 \\ 2v_1 - v_2 &= -2v_2 \end{aligned}$$

等價於

$$v_2 = -2v_1$$

故取 $v_1 = 1$, $v_2 = -2$, 得特徵向量

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

根據重疊原理, 一般解爲

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

代初始條件 $x(0) = 6$, $x'(0) = v(0) = 0$, 得

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 6 \\ c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

兩式相減並代回第一或第二式, 得

$$3c_2 = 6, \quad c_2 = 2, \quad c_1 = 4$$

因此, 特殊解爲

$$x(t) = 4e^{t} + 2e^{-2t}$$

12. 令

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= 4x_1(1-x_1)-2x_1x_2 \\ f_2(x_1,x_2) &= x_2(2-x_2)-x_2 \end{aligned}$$

根據 Hartman-Grobman 定理, 原非線性系統

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

在平衡點 $\hat{\mathbf{x}}$ 的行爲可由近似線性系統

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

在平衡點 $(0,0)$ 的行爲判斷, 其中

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

且 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 爲

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

的 Jacobi 矩陣在 $\hat{\mathbf{x}}$ 的值, 即

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}$$

且當近似線性系統的係數矩陣 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 的特徵值不爲 0 且不爲純虛數時.

根據定義, 求平衡點相當於解 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 即

$$\begin{aligned} 2x_1(2-2x_1-x_2)&=0\\ x_2(1-x_2)&=0 \end{aligned}$$

相當於

$$x_1=0 \quad \text{或} \quad 2x_1+x_2=2$$

且

$$x_2=0 \quad \text{或} \quad x_2=1$$

可得 4 個平衡點

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (1,0), \quad \left(\frac{1}{2},1\right)$$

接著, $\mathbf{f}$ 的 Jacobi 矩陣

$$D\mathbf{f}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 4-8x_1-2x_2 & -2x_1 \\ 0 & 1-2x_2 \end{bmatrix}$$

代 $(0,0)$, 得

$$D\mathbf{f}(0,0)=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以及特徵值

$$\lambda_1=4, \quad \lambda_2=1$$

均爲正, 故近似線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲一不穩定節點 (泉源口) 並判斷出原非線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲不穩定節點 (泉源口).

同理, 代 $(0,1)$, 得

$$D\mathbf{f}(0,1)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

以及特徵值

$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=-1$$

一正, 一負, 故原非線性系統的平衡點 $(0,1)$ 爲不穩定鞍點.

代 $(1,0)$, 得

$$D\mathbf{f}(1,0)=\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

及特徵值

$$\lambda_1=-4, \quad \lambda_2=1$$

一正, 一負, 故原非線性系統的平衡點 $(1,0)$ 爲不穩定鞍點.

最後, 代 $\left(\frac{1}{2},1\right)$, 得

$$D\mathbf{f}\left(\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

以及特徵值

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$$

均爲負, 故近似線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲一穩定節點 (水槽口) 並判斷出原非線性系統的平衡點 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 亦爲穩定節點 (水槽口).

13. 令

$$f_1(x_1, x_2) = x_2(x_1 + a)$$

且

$$f_2(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2 - x_1$$

根據定義, 求平衡點相當於解

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$x_2 = 0 \quad \text{或} \quad x_1 = -a$$

且

$$x_2^2 + x_2 - x_1 = 0$$

當 $x_2 = 0$, 由第二式, 得 $x_1 = 0$, 以及一個平衡點 $(0, 0)$. 若 $(0, 0$ 爲唯一的平衡點, 一個必要條件是, $x_1 = -a$, 且由第二式,

$$x_2^2 + x_2 + a$$

無實數根, 也就是判別式

$$1 - 4a < 0, \quad a > \frac{1}{4}$$

接著, $\mathbf{f}$ 的 Jacobi 矩陣

$$D\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 + a \\ -1 & 2x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

代入 $(0,0)$, 得近似線性系統的係數矩陣

$$D\mathbf{f}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因爲

$$\Delta = a > \frac{1}{4} \neq 0 \quad \text{且} \quad \tau = 1 > 0$$

以及

$$\tau^2 - 4\Delta = 1 - 4a < 0$$

得二特徵值 $\lambda_{1,2}$ 爲實部是正的共軛複數. 因此, 原非線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲不穩定螺旋點.

14. 標準化, 得

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= 2N_1\left(1-\frac{N_1}{20}-4\frac{N_2}{20}\right)\\ \frac{dN_2}{dt} &= 3N_2\left(1-\frac{N_2}{15}-\frac{1}{5}\frac{N_1}{15}\right)\end{aligned}$$

以及

$$K_1 = 20, \quad \alpha_{12} = 4$$

且

$$K_2 = 15, \quad \alpha_{21} = \frac{1}{5}$$

因爲

$$K_1 = 20 < \alpha_{12}K_2 = (4)(15) = 60$$

且

$$K_2 = 15 > \alpha_{21}K_1 = \left(\frac{1}{5}\right)(20) = 4$$

根據圖形法, 此爲 “物種 2 淘汰物種 1” 的異物種間競爭模型.

15. 設

$$\begin{aligned} f_1(N,P) &= N\left(1-\frac{N}{10}\right)-4PN \\ &= N\left(1-\frac{N}{10}-4P\right)=0 \\ f_2(N,P) &= PN-5P=P(N-5)=0 \end{aligned}$$

即

$$N=0 \quad \text{或} \quad \frac{N}{10}+4P=1$$

且

$$N=5 \quad \text{或} \quad P=0$$

得 3 個平衡點

$$(0,0), \quad \left(5,\frac{1}{8}\right), \quad (10,0)$$

接著, 近似線性系統的係數矩陣

$$D\mathbf{f}(N,P)=\begin{bmatrix} 1-\frac{N}{5}-4P & -4N \\ P & N-5 \end{bmatrix}$$

代 $(0,0)$, 得

$$D\mathbf{f}(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

以及特徵值

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=-5$$

一正, 一負, 故原非線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲一鞍點.

代 $\left(5,\frac{1}{8}\right)$, 得

$$D\mathbf{f}\left(5,\frac{1}{8}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -20\\ \frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}$$

因爲

$$\Delta=\frac{5}{2}>0,\quad \tau=-\frac{1}{2}<0$$

且

$$\tau^2-4\Delta=\frac{1}{4}-10<0$$

得二特徵值 $\lambda_{1,2}$ 是實部爲負的共軛負數. 因此, 原非線性系統的平衡點 $\left(5,\frac{1}{8}\right)$ 爲穩定螺旋點.

最後, 代 $(10,0)$, 得

$$D\mathbf{f}(10,0)=\begin{bmatrix}-1 & -40\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

以及特徵值

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=5$$

一正, 一負, 故原非線性系統的平衡點 $(10,0)$ 爲一鞍點.

16. 將水平簡單積分區域

$$R: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases}$$

改成垂直簡單區域

$$R: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

以及對應的積分次序 $dydx$, 根據 Fubini 定理以及取

$$u = 1 + x^3, \quad du = 3x^2 dx$$

的變數變換,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_y^1 \frac{y}{1+x^3} dxdy \\
&= \iint_R \frac{y}{1+x^3} dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{y}{1+x^3} dydx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^3)} dx \\
&= \frac{1}{6} \ln(1+x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \ln 2
\end{aligned}$$

17. 積分區域爲兩個垂直簡單區域

$$R_1:\begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{3} \\ 0 \le y \le x/\sqrt{3} \end{cases}$$

與

$$R_2:\begin{cases} \sqrt{3} \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

的聯集, 一扇形區域, 可合併成一個 θ-簡單區域

$$R:\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/6 \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

故根據 Fubini 定理以及極坐標型式的變數變換,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2+y^2}dydx \\
&\qquad + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-{}^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}dydx \\
= &\iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}dA \\
= &\int_0^{\pi/6}\int_0^{2} \frac{1}{1+r^2}rdrd\theta \\
= &\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}\ln 5 d\theta \\
= &\left(\frac{1}{2}\ln 5\right)\theta\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12}\ln 5
\end{aligned}$$

18. 將水平簡單積分區域

$$R:\begin{cases} 0\le y\le 1\\ 0\le x\le \arccos y\end{cases}$$

改成垂直簡單區域

$$R:\begin{cases} 0\le x\le \pi/2\\ 0\le y\le \cos x\end{cases}$$

以及對應的積分次序 $dydx$, 根據 Fubini 定理, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^{\arccos y}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dxdy\\
=\ &\iint_R\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dA\\
=\ &\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dydx\\
=\ &\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)y\Big|_0^{\cos x}dx\\
=\ &\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cos x dx\\
=\ &\left(\frac{1}{2}\right)2\sqrt{1+\sin^2 x}\Big|_0^{\pi/2}=\sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

19. 由題意, 相當於求

$$z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

在垂直簡單區域

$$R: \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2 - \sqrt{4 - x^2} \le y \le 2 + \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

上所形成的曲面 S 的面積. 因爲

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

且

$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

根據曲面面積的定義,

$$\begin{aligned} & S \text{ 的面積} \\ = & \iint_R \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,dA \\ = & \iint_R \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\,dA \end{aligned}$$

因爲被積函數的型式以及在極坐標

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

等價於

$$r^2 - 4r\sin\theta = 0, \quad r = 4\sin\theta$$

可將 R 表成 θ-簡單區域

$$R:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 4\sin\theta \end{cases}$$

並根據極坐標型式的變數變換,

$$\begin{aligned}
S\text{ 的面積} &= \int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta}\frac{4}{\sqrt{16-r^2}}r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} -2(2)\sqrt{16-r^2}\Big|_0^{4\sin\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}-16(\cos\theta-1)d\theta \\
&\qquad +\int_{\pi/2}^{\pi}-16(-\cos\theta-1)d\theta \\
&= 16(\theta-\sin\theta)\Big|_0^{\pi/2} \\
&\qquad\qquad +16(\theta+\sin\theta)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= 16\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+16\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \\
&= 16\pi-32
\end{aligned}$$

第三個等號成立乃因爲代入 $4\sin\theta$ 後, 得

$$-16\sqrt{1-\sin^2\theta}=-16\sqrt{\cos^2\theta}$$

其中

$$\sqrt{\cos^2\theta}=\begin{cases}\cos\theta, & 0\le\theta\le\pi/2 \\ -\cos\theta, & \pi/2\le\theta\le\pi\end{cases}$$

所致. 一個避免因疏忽上式而造成的錯誤, 可根據對稱性, 先求函數

$$z = f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

在第一象限內的區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 4\sin\theta \end{cases}$$

上所形成的曲面 S_1 的面積, 即

$$\begin{aligned} S_1 \text{ 的面積} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{4\sin\theta} \frac{4}{\sqrt{16-r^2}} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} -2(2)\sqrt{16-r^2}\Big|_0^{4\sin\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} -16(\cos\theta - 1)d\theta \\ &= 16(\theta - \sin\theta)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} S \text{ 的面積} &= 2 \times (S_1 \text{ 的面積}) \\ &= 2 \times 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 16\pi - 32 \end{aligned}$$

20. 積分區域

$$R:\begin{cases} 1/2 \le x \le 1 \\ 1-x \le y \le x \end{cases}$$

乃一垂直簡單區域，但因被積函數的型式，需作極坐標型式的變數變換，即令

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dA = r\,dr\,d\theta$$

且由

$$x = 1, \quad r\cos\theta = 1$$

得

$$r = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

與

$$y = 1-x, \quad r\sin\theta = 1 - r\cos\theta$$

以及提示

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

得

$$r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

最後，由

$$y = x, \quad r\sin\theta = r\cos\theta, \quad \tan\theta = 1$$

得

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

故可將 R 表成 θ-簡單區域

$$R: \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/4 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sec\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \le r \le \sec\theta \end{cases}$$

且根據提示

$$\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

得

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}\int_{1-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})}^{\sec\theta} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\sec\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right) d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big|_0^{\pi/4} \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \ln(\sqrt{2}+1) - (0 - \ln(\sqrt{2}-1))/\sqrt{2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

21. 因爲積分變數是一個虛擬變數, 可令

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

根據比較定理,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-x^2}dx &< \int_1^\infty e^{-x}dx\\ &= -e^{-x}\Big|_1^\infty=e^{-1}<\infty\end{aligned}$$

得瑕積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ 收斂. 又 e^{-x^2} 在 $[0,1]$ 上連續, 故定積分 $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 存在並得瑕積分

$$I=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

收斂, 也就是說, I 是一有意義的實數而可作一般的運算.

由 Fubini 定理 (可推廣至瑕積分),

$$\begin{aligned}&\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dydx\\ &= \int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)dx\\ &= \left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\\ &= I^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

其中第三個等號成立, 乃因爲 $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$ 是一常數, 可提出積分符號所致.

將 R 表成 θ-簡單區域

$$R:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le r<\infty \end{cases}$$

並根據極坐標型式的變數變換,

$$\begin{aligned}\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}d\theta=\frac{\pi}{4} \qquad (2)\end{aligned}$$

最後, 比較 (1) 式與 (2) 式, 得

$$I^2=\frac{\pi}{4},\quad I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

22. 根據積分區域與被積函數的型式, 取

$$u = xy, \quad v = x$$

得對應的 uv-平面上的積分區域

$$S: \begin{cases} 1 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases}$$

一垂直或水平簡單區域. 接著, 解 x 與 y, 得

$$x = v, \quad y = \frac{u}{v}$$

以及 Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}$$

根據變數變換以及 Fubini 定理, 得

$$\begin{aligned}
&\iint_R xye^{1+x^2y^2}dA \\
&= \iint_S ue^{1+u^2}\left|-\frac{1}{v}\right| dudv \\
&= \int_1^4 \int_1^4 ue^{1+u^2}\left(\frac{1}{v}\right) dvdu \\
&= \int_1^4 ue^{1+u^2}\left(\ln v\Big|_1^4\right) du \\
&= 2\ln 2\int_1^4 ue^{1+u^2}du \\
&= (\ln 2)e^{1+u^2}\Big|_1^4 = (e^{17}-e^2)\ln 2
\end{aligned}$$

23. 首先, 積分區域 R 是兩個垂直簡單區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x \le y \le 2 - x \end{cases}$$

與

$$R_2 : \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 - x \end{cases}$$

的聯集, 不簡潔. 又根據被積函數的型式, 需取

$$u = y + x, \quad v = y - x$$

得

$$x = \frac{1}{2}(u - v), \quad y = \frac{1}{2}(u + v)$$

由 R 的邊界

$$x + y = 1 \quad 與 \quad x + y = 2$$

得

$$1 \le u \le 2$$

由

$$x \ge 0 \quad 與 \quad y \ge 0$$

得

$$v \le u \quad 與 \quad -u \le v$$

合併, 得 uv-平面中對應的垂直簡單區域

$$S:\begin{cases} 1\le u\le 2 \\ -u\le v\le u \end{cases}$$

又 Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

因此, 根據變數變換以及 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}
&\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA \\
=\ &\iint_S \cos\left(\frac{v}{u}\right)\left|\frac{1}{2}\right|dudv \\
=\ &\int_1^2\int_{-u}^{u}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{v}{u}\right)dvdu \\
=\ &\int_1^2 \frac{u}{2}\sin\left(\frac{v}{u}\right)\Big|_{v=-u}^{u}du \\
=\ &\int_1^2 \frac{u}{2}(\sin 1-\sin(-1))du \\
=\ &\int_1^2 u\sin 1du=\frac{u^2}{2}\sin 1\Big|_1^2=\frac{3}{2}\sin 1
\end{aligned}$$

24. 令 R 爲單位圓碟且 S 爲形成的曲面. 因爲

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

且

$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

根據曲面面積的定義,

$$\begin{aligned}
&S\text{ 的面積}\\
&= \iint_R \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dA\\
&= \iint_R \sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}(R\text{ 的面積})=\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$