

## 期中練習題(108上)

1. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$ . 解. 不存在

2. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 3x}$ . 解.  $\frac{\pi}{3}$

3. 試求  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x - 2 \left\lfloor \frac{x+3}{2} \right\rfloor + 2 \right)$ . 解. 不存在

4. 試求  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-1}{2+x}$ . 解.  $\infty$

5. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^3}}{x^2}$ . 解. 0

6. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2/x} \cos \left( \frac{1}{x} \right)$ . 解. 0

7. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 \sqrt{3x}}{x}$ . 解. 3

8. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin \sqrt{x})(\cos x)}{x - \sqrt{x}}$ . 解.  $-1$

9. 試求  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x + 1}{3 - 2x}$ . 解.  $-\infty$

10. 試以極限的  $\epsilon$ - $\delta$  定義證明  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) = 8$ .

11. 試以極限的  $\epsilon$ - $\delta$  定義證明 (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$  以及 (b) 對任意的  $c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ .

12. 令  $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ c, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$  (a) 試以連續函數的定義求  $c$  使得  $f$  在  $x = 0$  是連續的. (b) 接續 (a) 小題, 試以導函數的定義說明  $f$  在  $x = 0$  是否是可微. 解.  $c = 0$ , 不可微

13. 設  $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  試問  $g$  在  $x = 0$  連續嗎? 可微嗎? 解. 連續, 可微

14. 設  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1}, & x \neq 1, \\ -5, & x = 1. \end{cases}$  (a) 試以定義

說明  $f$  在  $x = 1$  是否連續. 若不連續,  $x = 1$  是可移除的還是不可移除的非連續點? (b) 試求

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(|f(x)|)$ . 解. 可移除的,  $\ln 2$

15. 設  $g(x) = x - 3 \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1$ . (a) 試繪  $g$  的圖形並以定義說明  $g$  在哪些點是非連續的. 這些非連續點是可移除的, 還是不可移除的? (b)  $g$  是週期函數嗎? 若是的話, 週期為何?

解.  $3k + 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 不可移除的, 週期為 3

16. 給定方程式  $e^{-x/3} = x$ . (a) 試以中間值定理證明此方程式在  $[0, 3]$  內有解. (b) 若從  $[0, 3]$  開始, 以二分法求此方程式的估計解時, 試問至少需幾次二分, 才可保證估計解與真正解的誤差會小於  $10^{-3}$ ?

解. 12

17. 令  $f(x) = x^{10} - 5x^2 + 7x + 2$ . (a) 試證存在一  $c$  使得  $|c| < 1$  且  $f(c) = \pi$ . (b) 若以二分法

估計  $c$ , 試問至少需幾次二分, 才可保證誤差小於 0.001? 解. 11

18. 設  $f(x) = \left( \frac{1}{\sec \sqrt{x^2 + 1}} \right)^{3/2}$ . 試求  $f'(x)$ .

19. 設  $g(x) = 5^{\sin(5^x)}$ . 試求  $g'(x)$ .

20. 設  $h(x) = \frac{2^{3x-1} \cos^2 x}{(x^2 + 1)^{4x}}$ . 試求  $h'(x)$ .

21. 設  $f(t) = \sqrt{t^2 + \sqrt{t+1}}$ . 試求  $f'(t)$  與  $f''(t)$ .

22. 設  $g(x) = \sec^2(3x^2 - 1)$ . 試求  $g'(x)$ .

23. 設  $h(s) = 5^{\sqrt{1-\cos 2s}}$ . 試求  $h'(s)$ .

24. 試求曲線  $x \ln y = y \ln x$  上在  $x = 1$  的切線.

解.  $y = x$

25. 設  $f(x) = \log_3(\tan 2x)$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ . 試求  $\frac{d}{dx} f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ . 解.  $\frac{\sqrt{3}\ln 3}{8}$

26. 設  $N(t)$  為某族群在  $t$  時的大小且此族群的單位成長率為 4%. 若  $N(5) = 200$ , 試以線性近似估計此族群在  $t = 5.1$  時的大小. 解. 200.8

27. 今將一底部半徑為 4, 高為 12 的正圓錐倒立; 裝滿水, 並以正圓錐的水面半徑縮小速率為 2 的方式將水由尖端流出. (a) 試問當正圓錐的水面高度為 9 時, 水量流出的速率為何? (b) 接續 (a) 小題, 若此倒立正圓錐的水, 流入下方一個半徑為 6, 高為 2 的正圓柱內, 試問此時正圓柱水面上升的速率為何?

解.  $-54\pi, \frac{3}{2}$

28. 設一游池的長為 40 呎, 寬為 20 呎, 且右端淺處的深度為 4 呎, 左端深處的深度為 9 呎, 及底部是一由右端淺處至左端深處的斜平面. 今以 10 呎<sup>3</sup>/分

的速率將水注入池中，試求當左端深處的水深為 4 呎時，左端深處水面的上升速率。

解.  $\frac{1}{64}$  呎/分

## 29. 定義

$$\sec^{-1} x : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

為  $\sec x$  的反函數，即

$$y = \sec^{-1} x, |x| \geq 1 \Leftrightarrow \sec y = x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

試證

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

## 30. 試繪 $f(x) = e^{1/x}$ 的圖形並標示出局部極值，反曲點與漸近線（若存在的話）。

解. 反曲點  $(-1/2, e^{-2})$ ，垂直漸近線  $x = 0$ ，水平漸近線  $y = 1$

31. 試繪  $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 局部最小值  $(0, 0)$ , 局部最大值  $(4, 2^{5/3})$ , 反曲點  $(6, 0)$

32. 試繪  $f(x) = xe^x$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 水平漸近線  $y = 0$ , 局部最小值  $(-1, -e^{-1})$ , 反曲點  $(-2, -2e^{-2})$

33. 試繪  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 局部最小值  $(-1, 5)$ , 局部最大值  $(1, 1)$ , 反曲點  $(0, 3)$  與  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 \mp \frac{7}{8}\sqrt{2})$

34. 試繪  $f(x) = x^{1/3}(x+4)$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 局部最小值  $(-1, -3)$ , 反曲點  $(0, 0)$  與  $(2, 6\sqrt[3]{2})$

35. 試繪  $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 局部最大值  $(e, e^{-1})$ , 局部最小值  $(-e, -e^{-1})$ , 反曲點  $(e^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2})$  與  $(-e^{3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3/2})$ , 垂直漸近線  $x = 0$ , 水平漸近線  $y = 0$

36. 試繪  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$  的圖形並標示出局部極值, 反曲點與漸近線 (若存在的話).

解. 反曲點  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$  與  $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$ , 斜漸近線  $y = x$

37. 試證

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x, \quad x > 0$$

38. 設  $f$  為奇函數且在整個數線上均可微. 試證對每一正數  $b$ , 均存在一  $c \in (-b, b)$  使得

$$f'(c) = \frac{f(b)}{b}$$



39. 試以均值定理證明

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1, \quad x > 0$$

40. 試證對所有的  $x \geq 0$ ,

$$0 \leq \ln(1+x^2) \leq x$$