期末練習題解答(107上)

1. <解法一> 代入法. 取 $u = x - 3$, 得 $du = dx$ 且 $x = u + 3$ 以及

$$\begin{aligned}\int x(x-3)^5 dx &= \int (u+3)u^5 du \\ &= \frac{1}{7}u^7 + \frac{3}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{7}(x-3)^7 + \frac{1}{2}(x-3)^6 + C\end{aligned}$$

<解法二> 分部積分. 取

$$u = x, \quad dv = (x-3)^5 dx$$

得

$$du = dx, \quad v = \frac{1}{6}(x-3)^6$$

以及

$$\begin{aligned}\int x(x-3)^5 dx &= \int u dv \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)^6 - \frac{1}{6}\int (x-3)^6 dx \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)^6 - \frac{1}{42}(x-3)^7 + C\end{aligned}$$

2. 根據變數變換, 取 $u=x^2+1$, 得 $du=2xdx$ 且 $x^2=u-1$ 以及

$$x=0,\ u=1;\quad x=\sqrt{3},\ u=4$$

代入,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}dx\\
=\ &\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}(x^2)^2\sqrt{x^2+1}(2x)dx\\
=\ &\frac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2\sqrt{u}du\\
=\ &\frac{1}{2}\int_1^4 (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})du\\
=\ &\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^4\\
=\ &\left[\left(\frac{2^7}{7}-\frac{2^6}{5}+\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\right]\\
=\ &\left(\frac{1920-1344+280}{105}\right)\\
&\qquad -\left(\frac{15-42+35}{105}\right)\\
=\ &\frac{856}{105}-\frac{8}{105}=\frac{848}{105}
\end{aligned}$$

3. 根據變數變換, 取 $u = \sec x$, 得

$$du = \sec x \tan x dx$$

且

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \tan x dx &= \int \underbrace{\sec^2 x}_{u^2} \underbrace{\sec x \tan x dx}_{du} \\ &= \frac{1}{3}\sec^3 x + C\end{aligned}$$

4. 因爲被積函數中的 x^2, 需使用兩次分部積分. 首先, 取

$$u = x^2, \quad dv = \cos x dx$$

得

$$du = 2x dx, \quad v = \sin x$$

以及

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

接著, 再令

$$u = 2x, \quad dv = \sin x dx$$

得

$$du = 2dx, \quad v = -\cos x$$

且

$$\begin{aligned} & \int x^2 \cos x dx \\ = & \ x^2 \sin x - \left(-2x \cos x + \int 2 \cos x dx\right) \\ = & \ x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

5. 根據變數變換, 令 $u = x^2$, 得 $du = 2xdx$ 且

$$x = 0,\ u = 0; \quad x = \pi,\ u = \pi^2$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos x^2 dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x^2(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2}\cos u du \\ &= \frac{1}{2}\sin u\Big|_0^{\pi^2} = \frac{1}{2}\sin\pi^2\end{aligned}$$

6. 乍看之下，被積函數的分母相當複雜，不知如何下手，但分解公因式 $\sqrt{x}$，就明朗了，即

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}+x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx$$

接著，根據變數變換，令 $u = \sqrt{x}+1$，得

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

以及

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}+x}}dx &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) \\
&= 2\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 4\sqrt{u}+C \\
&= 4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C
\end{aligned}$$

7. 根據代入法, 取 $u = \tan x$, 得

$$du = \sec^2 x dx$$

以及

$$\begin{aligned}&\int (1+\tan^2 x)\sec^2 x dx \\ = \ &\int (1+u^2) du = u + \frac{1}{3}u^3 + C \\ = \ &\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C\end{aligned}$$

8. 首先, 根據指數律改寫, 就明朗了, 即

$$\int e^{x+e^x} dx = \int e^{e^x} e^x dx$$

接著, 明顯地, 根據變數變換, 取 $u = e^x$, 得

$$du = e^x dx$$

以及

$$\begin{aligned}\int e^{x+e^x} dx &= \int e^{e^x}(e^x) dx \\ &= \int e^u du = e^u + C \\ &= e^{e^x} + C\end{aligned}$$

9. 根據半角公式,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

10. 根據半角公式,

$$\begin{aligned}\int \cos^2 3x dx &= \int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C\end{aligned}$$

11. 根據三角恆等式,

$$\begin{aligned}\int \tan^2 5x dx &= \int (\sec^2 5x - 1)dx \\ &= \frac{1}{5}\tan 5x - x + C\end{aligned}$$

12. 展開並化簡被積函數, 得

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{(t^2-2)(t^2+1)}{\sqrt{t}}dt \\
&= \int t^{7/2} - t^{3/2} - 2t^{-1/2}dt \\
&= \frac{2}{9}t^{9/2} - \frac{2}{5}t^{5/2} - 4t^{1/2} + C
\end{aligned}
$$

13. 根據平方差公式,

$$
\begin{aligned}
\int (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})dx &= \int (4-x)dx \\
&= 4x - \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}
$$

14. 分別將分部積分作用在第一項與第二項, 得

$$\begin{aligned}
&\int [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)]dx \\
&= \left[f(x)g'(x) - \int g'(x)f'(x)dx\right] \\
&\qquad - \left[g(x)f'(x) - \int f'(x)g'(x)dx\right] \\
&= f(x)g'(x) - g(x)f'(x) + C
\end{aligned}$$

15. 因爲 f 連續, 根據微積分基本定理, 由連續函數所定義的符號面積函數

$$\int_0^x f(t)dt$$

是可微的且導函數爲 $f(x)$. 因此, 根據乘法規則, 兩邊對 x 微分, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - \cos x + x \sin x \\ &= x \sin x \end{aligned}$$

故

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

且

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

16. 因爲 e^{u^2} 連續, 根據微積分基本定理, 符號面積函數

$$\int_1^t e^{u^2}du$$

是自變數爲 t 的連續且可微函數. 又

$$t\int_1^t e^{u^2}du$$

亦是連續的, 故再根據微積分基本定理, 由其所定義的符號面積函數

$$F(x)=\int_0^x \left[t\int_1^t e^{u^2}du\right]dt$$

是自變數爲 x 的連續且可微函數. 因此,

(a) $F'(x)=x\int_1^x e^{u^2}du$

根據定積分的約定,

(b) $F'(1)=1\cdot\int_1^1 e^{u^2}du=0$

根據乘法規則及微積分基本定理,

(c) $F''(x)=\int_1^x e^{u^2}du+xe^{x^2}$

再根據定積分的約定,

(d) $F''(1)=\int_1^1 e^{u^2}du+e=e$

17. 根據變數變換, 令 $u = 1 + g^2(x)$, 得

$$du = 2g(x)g'(x)dx$$

且

$$\begin{aligned}
&\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}dx \\
= \ & \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}(2g(x)g'(x))dx \\
= \ & \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} + C \\
= \ & \sqrt{1+g^2(x)} + C
\end{aligned}$$

18. <方法一> 同乘除 e^{-2x}, 得

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$$

接著, 根據變數變換, 令 $u = 1 + e^{-2x}$, 得

$$du = -2e^{-2x}dx$$

以及

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx &= -\frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{1+e^{-2x}}}_{1/u}\underbrace{(-2e^{-2x})dx}_{du} \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) + C\end{aligned}$$

<方法二> 同加減 e^{2x}, 得

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) dx$$

接著, 根據代入法, 取 $u = 1 + e^{2x}$, 得

$$du = 2e^{2x}dx$$

以及

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx \\ = \ & \int dx - \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{1+e^{2x}}}_{1/u} \underbrace{(2e^{2x})dx}_{du} \\ = \ & x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C \end{aligned}$$

形式上與方法一不同, 但是等價, 請自行驗證.

19. <方法一> 同乘除 e^x, 得

$$\int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx = \int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$$

接著, 根據變數變換, 令 $u = e^x + x$, 得

$$du = (e^x+1)dx$$

以及

$$\begin{aligned} \int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx &= \int \underbrace{\frac{1}{e^x+x}}_{1/u} \underbrace{(e^x+1)dx}_{du} \\ &= \ln|e^x+x| + C \end{aligned}$$

<方法二> 同加減 xe^{-x}, 得

$$\int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx = \int \left(1+\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{1+xe^{-x}}\right)dx$$

接著, 根據代入法, 令 $u = 1 + xe^{-x}$, 得

$$du = (e^{-x} - xe^{-x})dx$$

以及

$$\begin{aligned} &\int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx \\ = &\int dx + \int \underbrace{\frac{1}{1+xe^{-x}}}_{1/u} \underbrace{(e^{-x}-xe^{-x})dx}_{du} \\ = &\ x + \ln|1+xe^{-x}| + C \end{aligned}$$

與方法一等價, 雖然形式上不同, 請自行驗證.

20. 根據分部積分, 取

$$u = \ln(1+x^2), \quad dv = dx$$

得

$$du = \frac{2x}{1+x^2}dx, \quad v = x$$

以及不定積分

$$\begin{aligned}
&\int \ln(1+x^2)dx \\
&= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x + C
\end{aligned}$$

因此, 定積分

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\tan^{-1}x\Big|_0^1 \\
&= (\ln 2 - 2 + 2\tan^{-1}1) - (2\tan^{-1}0) \\
&= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2
\end{aligned}$$

21. 根據分部積分, 取

$$u = (\ln x)^2, \quad dv = dx$$

得

$$du = 2\ln x\left(\frac{1}{x}\right)dx, \quad v = x$$

以及

$$\int(\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$$

再根據分部積分, 取

$$u = \ln x, \quad dv = dx$$

得

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x$$

以及

$$\begin{aligned}\int(\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right)\\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C\end{aligned}$$

22. 根據分部積分, 取

$$u = \ln(x+1), \quad dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

得

$$du = \frac{1}{x+1}dx, \quad v = 2\sqrt{x+1}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx \\
&= 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - \int \frac{2}{\sqrt{x+1}}dx \\
&= 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C
\end{aligned}$$

23. <方法一> 根據分部積分，取

$$u = \sin^{-1} 2x, \quad dv = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

得

$$du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx, \quad v = \frac{1}{2}\sin^{-1}(2x)$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\
= \ & \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(2x)\right]^2 - \int \frac{\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx
\end{aligned}$$

因爲上式中的不定積分剛好就是原式，移項整理，得

$$2\int \frac{\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(2x)\right]^2$$

因此，

$$\int \frac{\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \frac{1}{4}\left[\sin^{-1}(2x)\right]^2 + C$$

<方法二> 根據代入法, 令 $u = \sin^{-1}(2x)$, 得

$$du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx \\
= \ & \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin^{-1}(2x)}_{u}\underbrace{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx}_{du} \\
= \ & \frac{1}{4}\left[\sin^{-1}(2x)\right]^2 + C
\end{aligned}$$

24. 首先, 根據變數變換, 令 $w=\ln x$, 得

$$dw=\frac{1}{x}dx$$

與

$$\int\frac{1}{x}\sin^{-1}(\ln x)dx=\int\sin^{-1}w\,dw$$

接著, 根據分部積分, 取

$$u=\sin^{-1}w,\quad dv=dw$$

得

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw,\quad v=w$$

以及

$$\begin{aligned}&\int\frac{1}{x}\sin^{-1}(\ln x)dx\\ =\;& w\sin^{-1}w-\int\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}dw\\ =\;& w\sin^{-1}w+\sqrt{1-w^2}+C\\ =\;& \ln x\sin^{-1}(\ln x)+\sqrt{1-(\ln x)^2}+C\end{aligned}$$

25. 根據面積公式以及取

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}dx$$

的變數變換,

$$面積 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

根據旋轉體體積公式及取

$$u = \ln^2 x, \quad dv = \frac{1}{x^2}dx$$

的分部積分, 得

$$du = \frac{2\ln x}{x}dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

與

$$\begin{aligned} 體積 &= \pi\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx \\ &= \pi\left(-\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_1^e + 2\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx\right) \end{aligned}$$

再使用一次分部積分, 取

$$u = \ln x, \quad dv = \frac{1}{x^2}dx$$

得

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = -\frac{1}{x}$$

以及旋轉體

體積

$$
\begin{aligned}
&= \pi\left[-\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_1^e + 2\left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx\right)\right] \\
&= \pi\left(-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)\Big|_1^e \\
&= \pi\left[\left(-\frac{1}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e}\right) - (-2)\right] \\
&= \left(2 - \frac{5}{e}\right)\pi
\end{aligned}
$$

26. 首先, 根據變數變換, 令 $u = \tan\theta$, 得

$$du = \sec^2\theta d\theta$$

以及

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta - \tan^2\theta} d\theta = \int \frac{1}{u^2(u-1)} du$$

接著, 根據部分分式, 令被積函數

$$\frac{1}{u^2(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1}$$

通分, 解 A, B, C, 得

$$\begin{aligned} 1 &= Au(u-1) + B(u-1) + Cu^2 \\ &= (A+C)u^2 + (B-A)u - B \end{aligned}$$

比較係數, 得

$$A = -1,\ B = -1,\ C = 1$$

因此,

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta - \tan^2\theta} d\theta = \int \frac{1}{u^2(u-1)} du \\ &= \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{-1}{u^2} + \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= -\ln|\tan\theta| + \frac{1}{\tan\theta} + \ln|\tan\theta - 1| + C \\ &= \ln|1 - \cot\theta| + \cot\theta + C \end{aligned}$$

27. 同乘除 $\sec x + \tan x$ 並根據變數變換, 令

$$u = \sec x + \tan x$$

得

$$\begin{aligned} du &= (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx \\ &= \sec x(\sec x + \tan x)dx \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &\int \sec x dx \\ &= \int \underbrace{\frac{1}{\sec x + \tan x}}_{1/u} \underbrace{\sec x(\sec x + \tan x)dx}_{du} \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

28. 因爲

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

根據不定積分的定義,

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

29. 根據分部積分, 取

$$u = \sec x, \quad dv = \sec^2 x dx$$

得

$$du = \sec x \tan x dx, \quad v = \tan x$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \sec^3 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1) dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \\
&\qquad - \int \sec^3 x dx
\end{aligned}$$

移項整理, 得

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

故

$$\begin{aligned}
&\int \sec^3 x dx \\
&= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C
\end{aligned}$$

30. 根據變數變換, 令 $u = \cos x$, 得

$$du = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned}
\int \tan x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1/u} \underbrace{(-\sin x) dx}_{du} \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

31. 改寫,

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}$$

32. 改寫並根據變數變換, 令 $u = \tan x$, 得

$$du = \sec^2 x dx$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx \\
&= \int \underbrace{\tan x}_{u} \underbrace{\sec^2 x dx}_{du} - \int \tan x dx \\
&= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

33. 展開並化簡, 得

$$\begin{aligned}&\int (1+\tan x)^2 dx\\ =&\ \int (1+2\tan x+\tan^2 x)dx\\ =&\ \int (\sec^2 x+2\tan x)dx\\ =&\ \tan x+2\ln|\sec x|+C\end{aligned}$$

34. 改寫並根據變數變換, 令 $u=\tan x$, 得

$$du=\sec^2 x dx$$

以及

$$\begin{aligned}&\int \tan^{3/2} x\sec^4 dx\\ =&\ \int \tan^{3/2} x(1+\tan^2 x)\sec^2 x dx\\ =&\ \int u^{3/2}(1+u^2)du\\ =&\ \frac{2}{9}\tan^{9/2} x+\frac{2}{5}\tan^{5/2} x+C\end{aligned}$$

35. 改寫並根據變數變換, 取 $u = \cos x$, 得

$$du = -\sin x$$

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{\cos x}\sin^3 x dx \\
= &\int \sqrt{\cos x}(1-\cos^2 x)\sin x dx \\
= &\int \underbrace{\sqrt{\cos x}(\cos^2 x - 1)}_{\sqrt{u}(u^2-1)}\underbrace{(-\sin x)dx}_{du} \\
= &\frac{2}{7}\cos^{7/2} x - \frac{2}{3}\cos^{3/2} x + C
\end{aligned}$$

36. 根據對數律化簡與變數變換，令 $u = x^2 + 1$，得

$$du = 2xdx$$

且

$$x = 0,\ u = 1; \quad x = 3,\ u = 10$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 x \ln \sqrt{x^2+1}\,dx \\
=\ & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^3 \underbrace{\ln(x^2+1)}_{\ln u}\underbrace{(2x)dx}_{du} \\
=\ & \frac{1}{4}\int_1^{10} \ln u\,du \\
=\ & \frac{1}{4}(u\ln u - u)\Big|_1^{10} \\
=\ & \frac{1}{4}[(10\ln 10 - 10) - (0 - 1)] \\
=\ & \frac{5}{2}\ln 10 - \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

37. 根據分部積分, 取

$$u = xe^{2x}, \quad dv = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

得

$$du = (e^{2x} + 2xe^{2x})dx = (2x+1)e^{2x}dx$$

與

$$v = \frac{-1}{2(2x+1)}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx \\
&= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \int \frac{(2x+1)e^{2x}}{2(2x+1)}dx \\
&= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \\
&= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}e^{2x} + C \\
&= \frac{-2xe^{2x} + (2x+1)e^{2x}}{4(2x+1)} + C \\
&= \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C
\end{aligned}$$

38. 根據分部積分, 取

$$u = x^2 e^{x^2}, \qquad dv = \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

得

$$du = (2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2})dx = 2xe^{x^2}(x^2+1)dx$$

與

$$v = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx \\
= \;& -\frac{x^2 e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \int \frac{2xe^{x^2}(x^2+1)}{2(x^2+1)}dx \\
= \;& -\frac{x^2 e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \int xe^{x^2}dx \\
= \;& -\frac{x^2 e^{x^2}}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}e^{x^2} + C \\
= \;& \frac{-x^2 e^{x^2} + (x^2+1)e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C \\
= \;& \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C
\end{aligned}$$

39. 改寫並根據分部積分, 取

$$u = x, \quad dv = e^{-x/2}$$

得

$$du = dx, \quad v = -2e^{-x/2}$$

以及

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{e^x}}dx &= \int xe^{-x/2}dx \\ &= -2xe^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}dx \\ &= -2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2} + C \\ &= -2(x+2)e^{-x/2} + C\end{aligned}$$

40. 首先, 根據代入法, 取 $u = \sqrt{x}$, 得

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx, \quad dx = 2udu$$

與

$$x = 9,\ u = 3; \quad x = 16,\ u = 4$$

以及

$$\begin{aligned}\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx &= \int_3^4 \frac{u}{u^2-4}(2u)du \\ &= 2\int_3^4 \frac{u^2}{u^2-4}\end{aligned}$$

接者, 根據部分分式,

$$\begin{aligned}&\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx \\ &= 2\int_3^4 \frac{u^2-4+4}{u^2-4}du \\ &= 2\int_3^4 \left(1 + \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du \\ &= 2(u + \ln|u-2| - \ln|u+2|)\Big|_3^4 \\ &= 2\left[\left(4 + \ln\frac{2}{6}\right) - (3 - \ln 5)\right] \\ &= 2\left(1 + \ln\frac{5}{3}\right) = 2 + \ln\frac{25}{9}\end{aligned}$$

41. <方法一> 改寫並根據變數變換, 令 $u = x^2 + 1$, 得

$$du = 2xdx, \quad x^2 = u - 1$$

以及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx \\
= &\ \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}(2x)dx \\
= &\ \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{\sqrt[3]{u}}du \\
= &\ \frac{1}{2}\int (u^{2/3} - u^{-1/3})du \\
= &\ \frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2-1)^{2/3} + C
\end{aligned}$$

<方法二> 根據分部積分, 取

$$u = x^2, \quad dv = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

得

$$du = 2x dx, \quad v = \frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}$$

以及

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx \\ = & \frac{3}{4}x^2(x^2+1)^{2/3} \\ & \qquad -\frac{3}{4}\int (x^2+1)^{2/3}(2x)dx \\ = & \frac{3}{4}x^2(x^2+1)^{2/3} - \frac{9}{20}(x^2+1)^{5/3} + C \end{aligned}$$

形式上與方法一不同, 但等價, 均可化簡爲

$$(x^2+1)^{2/3}\left[\frac{3}{10}x^2 - \frac{9}{20}\right]$$

請自行驗證.

42. 首先, 根據變數變換, 令 $u = e^x$, 得 $du = e^x dx$ 以及

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx &= \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}e^x dx \\ &= \int \frac{u}{u^2+3u+2}du \\ &= \int \frac{u}{(u+2)(u+1)}du\end{aligned}$$

接著, 根據部分分式, 令被積函數

$$\frac{u}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$$

並解 A 與 B, 得

$$\begin{aligned}u &= A(u+1) + B(u+2) \\ &= (A+B)u + A + 2B\end{aligned}$$

比較係數, 得

$$A + B = 1; \quad A + 2B = 0$$

兩式相減, 得

$$A = 2, \quad B = -1$$

且

$$\frac{u}{(u+2)(u-1)} = \frac{2}{u+2} - \frac{1}{u+1}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx \\
= \; & \int \frac{2}{u+2}du - \int \frac{1}{u+1}du \\
= \; & 2\ln(e^x+2) - \ln(e^x+1) + C \\
= \; & \ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + C
\end{aligned}
$$

43. 根據變數變換, 令 $u = \sqrt{x}$, 得

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx; \quad dx = 2udu$$

且

$$x = 1/3,\ u = 1/\sqrt{3}; \quad x = 3,\ u = \sqrt{3}$$

以及

$$\begin{aligned}
\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}dx &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{u}{u^4+u^2}(2u)du \\
&= 2\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}du \\
&= 2\tan^{-1} u\Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

44. 改寫被積函數, 配方及變數變換, 得

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x+6}{x^2+2x+5}dx \\
&= \int \frac{(x+1)+5}{x^2+2x+5}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}dx \\
&\qquad\qquad + \int \frac{5}{(x+1)^2+4}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) \\
&\qquad\qquad + \frac{5}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) \\
&\qquad\qquad + \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C
\end{aligned}
$$

45. 根據部分分式, 首先令被積函數

$$\frac{-3x^3+3x^2-6x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

解 A, B, C, D, E, 得

$$\begin{aligned}-3x^3+3x^2-6x+4 &= A(x^2+2)^2+(Bx+C)x(x^2+2)\\ &\quad +(Dx+E)x\\ &= (A+B)x^4+Cx^3+(4A+2B+D)x^2\\ &\quad +(2C+E)x+4A\end{aligned}$$

比較係數, 得

$$A+B=0,\ C=-3,\ 4A+2B+D=3$$

與

$$2C+E=-6,\ 4A=4$$

故

$$A=1,\ B=-1,\ C=-3,\ D=1,\ E=0$$

以及

$$\frac{-3x^3+3x^2-6x+4}{x(x^2+2)^2} = \frac{1}{x}+\frac{-x-3}{x^2+2}+\frac{x}{(x^2+2)^2}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int \frac{-3x^3+3x^2-6x+4}{x(x^2+2)^2}dx \\
=\ & \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+2}dx - 3\int \frac{1}{x^2+2}dx \\
& \qquad + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx \\
=\ & \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) \\
& -\frac{3\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2(x^2+2)} + C
\end{aligned}$$

46. 分解被積函數的分母,

$$\int \frac{1}{x^3-1}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

根據部分分式, 令被積函數

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

解 A, B, C, 得

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C \end{aligned}$$

比較係數, 得

$$A+B=0,\ A-B+C=0,\ A-C=1$$

即

$$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=-\frac{2}{3}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right. \\ &\qquad \left. -\frac{\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) \end{aligned}$$

因此，由上式，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^3-1}dx \\
= &\ \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \\
&\qquad -\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx \\
= &\ \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) \\
&\qquad -\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

47. 因爲 (參考期中練習題)

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

根據不定積分的定義,

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+C$$

接著, 配方並根據線性轉換, 由上式得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x-2}}dx\\
=\ &\int\frac{1}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-3}}dx\\
=\ &\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}}dx\\
=\ &\frac{1}{2\sqrt{3}}\sec^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

48. 因爲 f 連續且 $f(2)=0$, 分子的極限

$\lim_{x\to 0} f(2+3x)+f(2+5x) = f(2)+f(2) = 0$

同時, 分母的極限

$$\lim_{x\to 0} x = 0$$

根據羅必達法則以及 f' 連續與 $f'(2)=7$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} [3f'(2+3x)+5f'(2+5x)] \\
&= 3f'(2)+5f'(2) \\
&= 8f'(2) = 56
\end{aligned}$$

49. 通分,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+ax^3+bx}{x^3} \qquad (1)\\
&= 0
\end{aligned}$$

因為分母的極限為 0 且原式的極限存在, 分子的極限必須為 0. 因此, 根據羅必達法則, 由 (1) 式,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+3ax^2+b}{3x^2}=0 \qquad (2)$$

同理, 因為極限存在且分母的極限為 0, 得分子的極限必須為 0, 即

$$\lim_{x\to 0}(2\cos 2x+3ax^2+b)=2+b=0$$

因此, $b=-2$. 再根據羅必達法則, 由 (2) 式,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x+6ax}{6x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+6a}{6}=0
\end{aligned}$$

因此, 分子的極限必須為 0, 即

$$\lim_{x\to 0}(-8\cos 2x+6a)=-8+6a=0$$

故, $a=\frac{4}{3}$. 合併, $a=\frac{4}{3}$ 且 $b=-2$.

50. 提出 x 並改寫,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x) &= \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1) \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x} \qquad (3)\end{aligned}$$

因爲分子, 分母的極限均爲 0, 根據羅必達法則, 由 (3) 式,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(xe^{1/x}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1\end{aligned}$$

51. 通分,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

因爲分子與分母的極限均爲 0, 根據羅必達法則,
由上式,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x+(1-1/x)}$$

因爲分子與分母的極限亦均爲 0, 再根據羅必達法則, 由上式,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{1/x^2}{1/x+(1/x^2)}\\ &= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

52. 代入 0, 得未定式 1^∞. 故先根據對指轉換, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)\end{aligned}$$

因爲分子與分母的極限均爲 0, 使用羅必達法則兩次,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sec^2 x}{2}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

最後, 代入指數函數內, 得

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

53. 首先, 根據對數律改寫,

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x] = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

計算極限, 得未定式 $\infty\cdot 0$. 故根據顛倒轉換, 由上式, 得

$$\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x] \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

計算極限, 得未定式 $\frac{0}{0}$, 故根據羅必達法則, 由上式,

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+3)-\ln x] \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+3/x}(-3/x^2)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+3/x} = 3 \end{aligned}$$

54. 代入 0^+, 得未定式 $\infty-\infty$. 通分, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\\ =&\lim_{x\to 0^+}\frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x(e^x-e^{-x})}\end{aligned}$$

計算極限, 得未定式 $\frac{0}{0}$, 故多次根據羅必達法則, 由上式,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\\ =&\lim_{x\to 0^+}\frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x(e^x-e^{-x})}\\ =&\lim_{x\to 0^+}\frac{x(e^x-e^{-x})}{(e^x-e^{-x})+x(e^x+e^{-x})}\\ =&\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-e^{-x})+x(e^x+e^{-x})}{2(e^x+e^{-x})+x(e^x-e^{-x})}\\ =&\frac{0+0}{4+0}=0\end{aligned}$$

55. 令 f 爲被積函數, 即

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$$

因爲

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{-\sin x}{1+x^2}=-f(x)$$

得被積函數 f 爲奇函數. 又積分區間 $[-1,1]$ 對稱原點. 因此, f 在 x-軸上所圍出的區域與 x-軸下所圍出的區域對稱於原點, 根據定積分的幾何意義,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx=A_+-A_-=0$$

56. 設 f 爲被積函數，即

$$f(x) = x^3 - x^7 + \frac{\sin x}{1+x^4}$$

則

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - (-x)^7 + \frac{\sin(-x)}{1+(-x)^4} \\ &= -x^3 + x^7 + \frac{-\sin x}{1+x^4} \\ &= -\left(x^3 - x^7 + \frac{\sin x}{1+x^4}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

也就是說，被積函數 f 爲奇函數. 又積分區間 $[-1,1]$ 對稱原點. 因此，根據定積分的幾何意義，

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3 - x^7 + \frac{\sin x}{1+x^4}\right)dx = 0$$

57. 因爲被積函數 $f(x)f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 根據分部積分, 取

$$u=f(x),\quad dv=f'(x)dx$$

得

$$du=f'(x)dx,\quad v=f(x)$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)f'(x)dx\\&= [f(x)]^2\Big|_a^b-\int_a^b f(x)f'(x)dx\\&= [f(b)]^2-[f(a)]^2-\int_a^b f(x)f'(x)dx\end{aligned}$$

移項整理, 得

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx=[f(b)]^2-[f(a)]^2$$

58. 因爲兩個被積函數均連續，根據微積分基本定理，兩邊對 x 微分，得

$$f(x) = \sin x + x\cos x + \frac{f(x)}{1+x^2},\ \ x > 0$$

解 $f(x)$，得

$$f(x)\left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right] = \sin x + x\cos x,\ \ x > 0$$

即

$$f(x) = \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)(\sin x + x\cos x),\ \ x > 0$$

59. 因爲兩個被積函數均連續, 根據微積分基本定理, 兩邊對 x 微分, 得

$$\begin{aligned}&f(x)+e^{-x^3}f(\sqrt[3]{x^3})(3x^2)\\&= e^{2x}+2xe^{2x}+(\ln\pi)\pi^x+\pi x^{\pi-1}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&f(x)+3x^2e^{-x^3}f(x)\\&= e^{2x}+2xe^{2x}+\pi^x\ln\pi+\pi x^{\pi-1}\end{aligned}$$

解 $f(x)$, 得

$$f(x)=\frac{e^{2x}+2xe^{2x}+\pi^x\ln\pi+\pi x^{\pi-1}}{1+3x^2e^{-x^3}}$$

60. 根據平均值的定義,

$$\lim_{h\to 0} f_{\text{avg}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

因爲 f 連續, 根據微積分基本定理以及定積分的約定, 上式中分子的極限

$$\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^x f(t)dt = 0$$

同時分母的極限亦爲 0, 得未定式 $\frac{0}{0}$. 故根據羅必達法則, 微積分基本定理與連續函數的極限性質,

$$\lim_{h\to 0} f_{\text{avg}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot 1}{1} = f(x)$$

61. 改寫, 得

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$$

乃連續函數 $\frac{1}{1+x}$ 在閉區間 $[0,1]$ 上 n 等分且取右端點的黎曼和. 故根據定積分的定義, 黎曼和的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) = \int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

62. 改寫, 得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+16}+\cdots+\frac{n}{5n^2}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+(2i)^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(2\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

乃連續函數 $\frac{1}{1+(2x)^2}$ 在閉區間 $[0,1]$ 上 n 等分且取右端點的黎曼和. 故根據定積分的定義, 黎曼和的極限

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+16}+\cdots+\frac{n}{5n^2}\right)\\&=\int_0^1\frac{1}{1+(2x)^2}dx=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)\Big|_0^1\\&=\frac{1}{2}\tan^{-1}2\end{aligned}$$

63. <方法一> 改寫，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

乃連續函數 $\pi\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 在閉區間 $[0,1]$ 上 n 等分且取右端點的黎曼和. 所以根據定積分的定義，黎曼和的極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)=\pi\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

接著，根據半角公式，由上式，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\\ =\;&\frac{\pi}{2}\int_0^2(1-\cos\pi x)dx\\ =\;&\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]\Big|_0^1\\ =\;&\frac{\pi}{2}[(1-0)-(0-0)]=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

<方法二> 改寫, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sin^2\left(\frac{1}{2}i\frac{\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}$$

乃連續函數 $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ 在閉區間 $[0,\pi]$ 上 n 等分且取右端點的黎曼和. 故根據定積分的定義以及半角公式, 黎曼和的極限

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\\
=\ &\int_0^{\pi}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx\\
=\ &\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx\\
=\ &\frac{1}{2}(x-\sin x)\Big|_0^{\pi}\\
=\ &\frac{1}{2}[(\pi-0)-(0-0))]=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

64. 因爲被積函數 $\frac{t}{t^2+1}$ 連續, 根據微積分基本定理以及定積分的約定, 分子的極限

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\frac{t}{t^2+1}dt=\int_0^0\frac{t}{t^2+1}dt=0$$

同時分母的極限亦爲 0, 得未定式 $\frac{0}{0}$. 因此, 根據羅必達法則以及微積分基本定理並化簡,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}\frac{t}{t^2+1}dt &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{x^4+1}(2x)}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x^4+1)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

65. 首先, 根據瑕積分的定義且同乘除 e^x 以及取 $u = e^x$, $du = e^x dx$ 的變數變換, 瑕積分

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
= &\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
= &\lim_{b\to\infty} \int_0^b \underbrace{\frac{1}{e^{2x} + 1}}_{1/(1+u^2)} \underbrace{e^x dx}_{du} \\
= &\lim_{b\to\infty} [\tan^{-1}(e^x)]\Big|_0^b \\
= &\lim_{b\to\infty} [\tan^{-1}(e^b) - \tan^{-1} 1] \\
= &\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

收斂. 同理, 因爲相同的被積函數, 瑕積分

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
= &\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
= &\lim_{a\to-\infty} [\tan^{-1}(e^x)]\Big|_a^0 \\
= &\lim_{a\to-\infty} [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(e^a)] \\
= &\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

收斂. 合併, 根據定義, 得瑕積分

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

收斂.

66. 對於 $x \geq 1$, $\ln x < x$, 得

$$\sqrt{x + 2\ln x} \leq \sqrt{x + 2x} = \sqrt{3x}$$

以及

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x + 2\ln x}}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{3x}}dx$$

又瑕積分

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{3x}}dx &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{b\to\infty} \sqrt{x}\Big|_1^b \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{b\to\infty} (\sqrt{b} - 1) = \infty\end{aligned}$$

發散. 故根據比較法, 瑕積分

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x + 2\ln x}}dx$$

亦發散.

67. 計算極限，得未定式 $\frac{\infty}{\infty}$. 根據羅必達法則，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{1/(2\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x}} = 0\end{aligned}$$

因此，存在夠大的固定正數 c 使得 $x \geq c$ 時，

$$\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1; \quad 2\ln x \leq \sqrt{x}$$

由此得

$$\int_c^\infty e^{-\sqrt{x}}dx \leq \int_c^\infty e^{-2\ln x}dx = \int_c^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

又瑕積分

$$\begin{aligned}\int_c^\infty \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_c^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{c}\end{aligned}$$

收斂. 故根據比較法，瑕積分

$$\int_c^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$$

亦收斂. 因爲 $e^{-\sqrt{x}}$ 在閉區間 $[0, c]$ 上連續，定

積分

$$\int_0^c e^{-\sqrt{x}}dx$$

存在. 合併, 得瑕積分

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^c e^{-\sqrt{x}}dx + \int_c^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$$

乃兩個有限值的和, 故收斂.

68. 因爲

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(1+(-x)^2)^2} \\ &= -\frac{x}{(1+x^2)^2} = -f(x) \end{aligned}$$

得 f 爲奇函數. 又積分區域 $(-\infty, \infty)$ 對稱於原點, 故 f 的圖形與 x-軸所圍出區域的面積爲

$$2\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$$

接著, 根據瑕積分的定義, 取

$$u = 1 + x^2; \quad du = 2xdx$$

的變數變換, 瑕積分

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}}_{1/u^2}\underbrace{(2x)dx}_{du} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+b^2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此, 區域面積爲

$$2\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

69. 因爲被積函數 $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ 在 $x = 1$ 不連續, 根據瑕積分的定義以及取

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x}dx$$

的變數變換,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx &= \lim_{a\to 1^+}\int_a^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx \\
&= \lim_{a\to 1^+}\int_a^e \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}_{1/\sqrt{u}}\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} \\
&= \lim_{a\to 1^+}(2\sqrt{\ln x})\Big|_a^e \\
&= 2\lim_{a\to 1^+}(1-\sqrt{\ln a}) \\
&= 2(1-0) = 2
\end{aligned}$$

收斂.