# 單元 1: 複習與預習
(課本 §1.1)

## 一. 簡介

微積分的兩位具代表性的發明人:

- 牛頓 (Isaac Newton) (1642-1727) (85歲)

- 萊布尼茲 (Gottfried Wilhelm Leibniz) (1646-1716) (70歲)

- 貢獻: 最早有系統地發展微積分

微積分的兩大主題:

- 微分計算 (differential calculus, 微分): 源於求曲線 (curves) 的切線 (tangent lines) 與極值 (extrema) (亦即, 極大值 (maxima) 與極小值 (minima), 如圖示.

- 積分計算 (integral calculus, 積分): 源於求曲線所圍成的區域的面積與實體的體積, 如圖示.

微分與積分的密切關係:

- 彼此互爲反運算 (亦即, 微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus), 最先由牛頓與萊布尼茲了解到此關係並以此關係發展出解決更爲困難問題的方法)

應用：物理定律與生物現象的描述，如

- 物種間互動關係的模型建構 (interactions between species)

- 神經細胞的活動描述 (neuron activities)

- 母體中基因多樣性的解釋 (genetic diversity)

- 全球溫室效應對植物影響之預測 (impact of global warming on vegetation) 等等

# 二. 複習

數學內容在高中時都已學過, 主要在熟悉所對應的英文與定義, 俾使在日後的學習過程中, 能越過因語言而產生的障礙或因定義不清楚而造成的模糊.

**(i)** 實數 (real numbers):
在視覺上可以用實數線 (real number line) 表示之.
$a < b \Leftrightarrow$ (相當於, 若且爲若) $a$ 落在 $b$ 的左邊
如圖示.

**(ii)** 區間 (intervals):

- 開區間 (open interval):
  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ (不包含二端點 $a$ 與 $b$)

- 閉區間 (closed interval):
  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ (包含二端點 $a$ 與 $b$)

- 右開區間 (right-open interval):
  $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ (只包含左端點 $a$)

- 左開區間 (left-open interval):
  $(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$ (只包含右端點 $b$)

- 無界或無限區間 (unbounded or infinite intervals):

  $$[a,\infty) = \{x : x \geq a\}$$

  $$(-\infty,a] = \{x : x \leq a\}$$

  $$(a,\infty) = \{x : x > a\}$$

  $$(-\infty,a) = \{x : x < a\}$$

**註 1.** 二符號 $\infty$ 與 $-\infty$ (非實數), 分別表示正無窮大 (plus infinity) 與負無窮大 (minus infinity).

**註 2.** 所有實數的集合或實數線 (real number line) 以

$$R = \{x : -\infty < x < \infty\} = (-\infty,\infty)$$

表示之.

如圖示.

**(iii)** 絕對值 (absolute value): 設 $a$ 爲一實數,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geq 0 \\ -a, & \text{若 } a < 0 \end{cases}$$

表示 $a$ 與 0 之間的距離, 如圖示.

二數 $x_1$ 與 $x_2$ 之間的距離定義爲

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

如圖示.

基本性質如下: 設 $b > 0$,

1. $|a| = b \Leftrightarrow a = \pm b$

2. $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

3. $|a| > b \Leftrightarrow a < -b$ 或 $a > b$

如圖示.

例. 試求下列各式的解:

**(a)** $\left|\frac{3}{2}x - 1\right| = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

**(b)** $|3x - 4| \geq 2$

<解> (a) 原式 $\Leftrightarrow$

$$\frac{3}{2}x-1=\pm\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

亦相當於

$$\frac{3}{2}x-1=\frac{1}{2}x+1 \text{ 或 } \frac{3}{2}x-1=-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

由此得

$$x=2 \text{ 或 } 2x=0$$

因此,

$$x=2 \text{ 或 } x=0$$

(b) 原式 $\Leftrightarrow$

$$3x-4\le -2 \text{ 或 } 3x-4\ge 2$$

亦相當於

$$3x\le 2 \text{ 或 } 3x\ge 6$$

由此得

$$x\le \frac{2}{3} \text{ 或 } x\ge 2$$

或者也可以

$$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[2,\infty)$$

表示其解, 如圖示.

**(iv)** 平面中的直線 (lines in the plane):

- 標準式 (standard form):

$$Ax + By + C = 0$$

其中 $A, B$ 不全爲 0.

- 點斜式 (point-slope form):

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

其中 $(x_0, y_0)$ 爲線上的一點且 $m$ 爲此線的斜率 (slope), 定義成

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

如圖示.

- 斜截式 (slope-intercept form):

$$y = mx + b$$

其中 $m$ 爲斜率, $b$ 爲 $y$-截距 ($y$-intercept), 其座標爲 $(0, b)$, 如圖示.

- 水平線 (horizontal line):

$$y = k$$

斜率爲 0 (0 slope), 如圖示.

- 鉛垂線 (vertical line):

$$x = h$$

無斜率 (no slope), 如圖示.

- 設 $l_1$ 與 $l_2$ 爲二直線且斜率分別爲 $m_1$ 與 $m_2$, 則

  **(1)** $l_1 \parallel l_2$ (平行, parallel) 若且爲若

$$m_1 = m_2$$

  **(2)** $l_1 \perp l_2$ (垂直, perpendicular) 若且爲若

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

- 應用: 用以表示二量 $x$ 與 $y$ 之間的某種比例 (proportional) 關係, 如: 斜截式

$$\begin{aligned} y = mx + b \quad &\Leftrightarrow \quad y - b = mx \\ &\Leftrightarrow \quad y - b \propto x \end{aligned}$$

亦即, $y-b$ 與 $x$ 成比例且比例因子 (proportionality factor) 爲 $m$.

- 虎克定律 (Hooke's law):

$$y = y_0 + mx$$

其中 $y_0$ 爲彈簧的原始長度, $x$ 爲施以的重量, $y$ 爲施重後的長度. 上式相當於

$$y - y_0 = mx \Leftrightarrow y - y_0 \propto x$$

亦即, 施重後長度的變化 $y-y_0$ 與重量 $x$ 成比例.

例. 試求過兩點 $(-2,1)$ 與 $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ 的直線.
<解>
(i) 求斜率: $m = \frac{-\frac{1}{2}-1}{3-(-2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{5} = -\frac{3}{10}$
(ii) 點: $(-2,1)$
(iii) 由點斜式 (point-solpe form), 得直線方程式

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x-(-2))$$

亦相當於

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x+2)$$

或者

$$y = -\frac{3}{10}x + \frac{2}{5}$$

**(v)** 圓 (circle): 與圓心 (center) $(x_0, y_0)$ 有相同距離 (稱作半徑 (radius)) $r$ 的點 $(x, y)$ 所形成的集合. 根據距離公式, 圓的定義相當於方程式

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

特例: 單位圓 (unit circle), 以原點 (origin) 為圓心且半徑為 1 的圓, 如圖示.

例. 試求過點 $(5, 7)$ 且以 $(2, 3)$ 為圓心的圓.
$<$解$>$
(i) 求半徑: 圓上任一點與圓心間的距離. 由距離公式得

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = 5 \end{aligned}$$

(ii) 由圓的方程式, 得此圓為

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

**(vi)** 三角 (trigonometry): 在單位圓上, 如圖示,

- $\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y$
- $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{y}$
- $\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}} = \frac{x}{1} = x$
- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{x}$
- $\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{y}{x}$
- $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$
- 性質:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

例. 試求 $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的解.

<解> 移項並提出共同項 $\cos\theta$ 後, 原式相當於

$$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$$

亦相當於

$$\cos\theta = 0$$

由此得

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

或

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

由此可得

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

所以,

$$\text{解} \ = \left\{\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

## (vii) 指數 (exponentials) 與對數 (logarithms)

- 指數: $a^r$, 其中 $a$ 爲底數 (base), $r$ 爲指數 (exponent).
- 性質：

1. $a^r a^s = a^{r+s}$
2. $(ab)^r = a^r b^r$
3. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
5. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$
6. $(a^r)^s = a^{rs}$

- 對數: $\log_a y \stackrel{\text{def}}{=}$ 在以 $a$ 爲底數的指數中可得到 $y$ 值的指數, 亦即,

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y \tag{1}$$

如,

$$\log_2 8 = 3 \ (\text{因爲 } 2^3 = 8)$$

$$\log_3 9 = 2 \ (\text{因爲 } 3^2 = 9)$$

$$\log_4 \frac{1}{16} = -2 \ (\text{因爲 } 4^{-2} = \frac{1}{16})$$

接著, 根據對數的定義, 或由 (1) 式, 可得

$$x = \log_a a^x$$

且

$$a^{\log_a y} = y$$

亦即, 相同底數的指數與對數互爲反運算 (或作用互相抵銷).

- 性質:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^r = r\log_a x$

- 自然對數與自然指數: 以無理數

$$e\ (\approx 2.7182818)$$

爲底數的對數稱作自然對數, 並記作

$$\ln x$$

以無理數 $e$ 爲底數的指數稱作自然指數, 並記作

$$e^x$$

例. 試化簡下列各式:

**(a)** $\log_5 \frac{(x^2+3)\sqrt{x}}{5x}$

**(b)** $\ln \frac{3x^2}{\sqrt{y}}$

<解> 根據對數的性質, (a) 相當於

$$\log_5(x^2+3)+\log_5 x^{\frac{1}{2}}-\log_5 5-\log_5 x$$

再進一步化簡, 得

$$\log_5(x^2+3)+\frac{1}{2}\log_5 x-1-\log_5 x$$

同理, (b) 相當於

$$\ln 3+2\ln x-\frac{1}{2}\ln y$$

例. 試求下列各式的解:

**(a)** $9^{2x+1}=27$

**(b)** $\ln(x+1)=5$

**(c)** $5^{2x-1}=2^x$

<解> (a) 首先, 將原式改寫成相同底數的指數, 得

$$(3^2)^{2x+1}=3^3$$

因爲有相同的底數 3, 比較指數, 可得

$$2(2x+1)=4x+2=3$$

因此,

$$x = \frac{1}{4}$$

(b) 兩邊取指數 $e$, 得

$$e^{\ln(x+1)} = e^5$$

因爲指數與對數互爲反運算, 可得

$$x + 1 = e^5$$

所以,

$$x = e^5 - 1$$

(c) 兩邊取對數 ln, 得

$$\ln 5^{2x-1} = \ln 2^x$$

根據對數的性質, 上式相當於

$$(2x - 1)\ln 5 = x \ln 2$$

整理後, 可得

$$x(2\ln 5 - \ln 2) = \ln 5$$

由此,

$$x = \frac{\ln 5}{2\ln 5 - \ln 2}$$