期中練習題解答(105上)

1. 單邊極限分別為

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+} 0 = 0\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right) &= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty\end{aligned}$$

故雙邊極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$ 不存在.

2. 改寫成趨近 0 的相同量, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin 3x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

3. 根據高斯函數的定義, 右單邊極限

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^+}\left(x-2\left\lfloor\frac{x+3}{2}\right\rfloor+2\right)\\
&= \lim_{x\to 1^+}(x-2\cdot 2+2)=\lim_{x\to 1^+}(x-2)\\
&= -1
\end{aligned}$$

且左單邊極限

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-}\left(x-2\left\lfloor\frac{x+3}{2}\right\rfloor+2\right)\\
&= \lim_{x\to 1^-}(x-2\cdot 1+2)=1
\end{aligned}$$

故雙邊極限 $\lim_{x\to 1}\left(x-2\left\lfloor\frac{x+3}{2}\right\rfloor+2\right)$ 不存在.

4. 代入, $\lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{2+x}=\lim_{x\to -2^-}\frac{-1}{0^-}=\infty.$

5. 有理化,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+x^3}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^3}}\\
&= \frac{0}{1+1}=0
\end{aligned}$$

6. 因爲

$$-e^{-2/x} \le e^{-2x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le e^{-2/x}$$

且上下界的極限

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x} = \lim_{x\to 0^+} -e^{-2/x} = 0$$

由夾擠定理,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-2/x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

7. 根據三角恆等式及改寫成趨近 0 的相同量,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^2\sqrt{3x}}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2\sqrt{3x}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 3\left(\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}\right)^2\\ &= 3\cdot 1^2 = 3\end{aligned}$$

8. 改寫成趨近 0 的相同量並化簡整理, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin\sqrt{x})(\cos x)}{x-\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)(\cos x)\left(\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)(\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{0-1}=-1
\end{aligned}$$

9. 因爲分子的次數高於分母, 根據在無窮遠極限的規則,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x+1}{3-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-2x}=-\infty$$

10. 先設定 $|x-3|<1$, 即 $2<x<4$, 故

$$\begin{aligned} |x^2-1-8| &= |x^2-9| \\ &= |x-3||x+3| \\ &< 7|x-3| \qquad (1) \end{aligned}$$

因此, 對任意 $\epsilon>0$, 使得 $|x^2-1-8|<\epsilon$ 的充分條件爲上界

$$7|x-3|<\epsilon$$

亦等價於

$$|x-3|<\frac{\epsilon}{7} \qquad (2)$$

故對於任一 $\epsilon>0$, 取

$$\delta=\min\left(1,\frac{\epsilon}{7}\right)$$

由 (1), (2) 式, 當

$$0<|x-3|<\delta$$

時, 上界成立且上界小於 ϵ, 故

$$|x^2-1-8|<\epsilon$$

因此, 根據極限的定義,

$$\lim_{x\to 3}(x^2-1)=8$$

11. (a) 因爲

$$|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \epsilon$$

等價於

$$x < \epsilon^2 \tag{3}$$

故對於任一 $\epsilon > 0$, 取

$$\delta = \epsilon^2$$

由 (3) 式, 當

$$0 < x < \delta$$

時,

$$|\sqrt{x} - 0| < \epsilon$$

因此, 根據極限的定義,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

(b) 先設定 $|x-c|<\frac{c}{2}$, 即 即 $\frac{c}{2}<x<\frac{3c}{2}$, 故

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-\sqrt{c}| &= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \\ &< \frac{|x-c|}{\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}} \end{aligned} \tag{4}$$

因此, 對任意 $\epsilon>0$, 使得 $|\sqrt{x}-\sqrt{c}|<\epsilon$ 的充分條件爲上界

$$\frac{|x-c|}{\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}}<\epsilon$$

亦等價於

$$|x-c|<\left(\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}\right)\epsilon \tag{5}$$

故對於任一 $\epsilon>0$, 取

$$\delta=\min\left(\frac{c}{2},\left(\sqrt{\frac{c}{2}}+\sqrt{c}\right)\epsilon\right)$$

由 (4), (5) 式, 當

$$0<|x-c|<\delta$$

時, 上界成立且上界小於 ϵ, 故

$$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|<\epsilon$$

因此, 根據極限的定義,

$$\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$$

12. (a) 因為

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

根據連續的定義, f 在 $x = 0$ 連續的必要條件為

$$c = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

(b) 因為

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x \sin\frac{1}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}\end{aligned}$$

呈現上下震盪現象, 故不存在. 因此, 根據導函數的定義, f 在 $x = 0$ 不可微.

13. 當 $x \neq 0$,

$$-x^2 \le g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

且上下界在 $x = 0$ 的極限

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

故由夾擠定理,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

又由 g 的定義及上式,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$$

所以, 根據連續的定義, g 在 $x = 0$ 連續. 根據導函數與函數 g 的定義以及夾擠定理,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

g 在 $x = 0$ 可微.

14. (a) 因爲

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} x-3 = -2\end{aligned}$$

但不等於 $f(1) = -5$, 故 f 在 $x = 1$ 爲可移除的不連續.

(b) 因爲 $\ln x$ 與 $|x|$ 均爲連續函數, 根據連續函數合成的極限性質及 (a),

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \ln(|f(x)|) &= \ln(\lim_{x\to 1} |f(x)|) \\ &= \ln(|\lim_{x\to 1} f(x)|) \\ &= \ln(|-2|) = \ln 2\end{aligned}$$

15. (a) 因爲高斯函數的自變數每隔 1 會產生一跳躍, 當

$$0 \le \frac{x+2}{3} < 1$$

等價於

$$-2 \le x < 1$$

時,

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1 \\ &= x - 3(0) + 1 = x + 1 \end{aligned}$$

爲一線段. 同理, 當

$$1 \le \frac{x+2}{3} < 2$$

即

$$1 \le x < 4$$

時,

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1 \\ &= x - 3(1) + 1 = x - 2 \end{aligned}$$

亦爲一線段. 以此類推, 向左右延伸, 每隔 3, 均得一斜率爲 1, 左端實心點, 右端空心點的線段.

根據圖形, g 在

$$x = 3k+1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

時, 爲不可移除的不連續. 或當 $x > 3k+1$ 時,

$$\frac{x+2}{3} > \frac{3k+1+2}{3} = k+1$$

故

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to(3k+1)^+} g(x) \\
&= \lim_{x\to(3k+1)^+} \left(x - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1\right) \\
&= \lim_{x\to(3k+1)^+} [(3k+1) - 3(k+1) + 1] \\
&= -1
\end{aligned}$$

當 $x < 3k+1$ 時,

$$\frac{x+2}{3} < \frac{3k+1+2}{3} = k+1$$

得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to(3k+1)^-} g(x) \\
&= \lim_{x\to(3k+1)^-} \left(x - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1\right) \\
&= \lim_{x\to(3k+1)^-} [(3k+1) - 3(k) + 1] \\
&= 2
\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{x\to(3k+1)} g(x)$$

不存在, 且根據連續的定義, g 在 $x = 3k + 1$ 為不可移除的不連續.

(b) 根據圖形, g 是週期為 3 的週期函數. 或根據高斯函數的跳躍高度為 1,

$$\begin{aligned}
g(x+3) &= (x+3) - 3\left\lfloor \frac{x+3+2}{3} \right\rfloor + 1 \\
&= (x+3) - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} + 1 \right\rfloor + 1 \\
&= (x+3) - 3\left(\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1\right) + 1 \\
&= x - 3\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + 1 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

故 g 是週期為 3 的週期函數.

16. (a) 因爲

$$e^{-x/3} = x$$

等價於

$$f(x) = e^{-x/3} - x = 0$$

又

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

且

$$f(3) = e^{-1} - 3 < 0$$

故根據中間值定理, f 在 $[0,3]$ 有根, 即方程式 $e^{-x/3} = x$ 在 $[0,3]$ 內有解.

(b) 若 n 次二分,

$$\text{誤差} = |\text{眞正解} - \text{估計解}| < \frac{3}{2^n}$$

故使誤差小於 10^{-3} 的一個充分條件爲誤差上界

$$\frac{3}{2^n} < 10^{-3}$$

相當於

$$2^n > 3000$$

試一些 n, 得

$$n = 10 : 2^{10} = 1024 \quad (\text{不合})$$

$$n = 11 : 2^{11} = 2048 \quad (\text{不合})$$

$$n = 12 : 2^{12} = 4096 \quad (\text{符合})$$

故取 $n = 12$ 作爲最小的二分次數.

17. (a) 因為 f 在閉區間 $[-1,1]$ 上連續, 且

$$f(-1)=1-5-7+2=-9$$

與

$$f(1)=1-5+7+2=5$$

以及

$$f(-1)<\pi<f(1)$$

根據中間值定理, 存在一 $c\in(-1,1)$ 使得 $f(c=\pi)$, 得證. (b) 根據二分法, 若二分 n 次, 得

$$\text{誤差}=|\text{真正解}-\text{估計解}|<\frac{1-(-1)}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

故使誤差小於 0.001 的一個充分條件為誤差上界

$$\frac{1}{2^{n-1}}<0.001$$

等價於

$$2^{n-1}>1000$$

因為 $2^{10}=1024>1000$, 得 $n-1=10$ 符合充分條件, 即取 $n=11$ 作為最小的二分次數.

18. 改寫並使用連鎖規則 3 次, 得

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\sec^{-3/2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\\
&= -\frac{3}{2}\sec^{-5/2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\\
&\qquad \sec\left(\sqrt{x^2+1}\right)\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\\
&\qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\
&= -\frac{3x\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{2\sqrt{x^2+1}\sec^{3/2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}
\end{aligned}
$$

19. 根據連鎖規則二次, 得

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (\ln 5)5^{\sin(5^x)}\cdot\cos(5^x)\cdot(\ln 5)5^x\\
&= (\ln 5)^2\cdot\cos(5^x)\cdot 5^{(x+\sin(5^x))}
\end{aligned}
$$

20. 根據對數微分並化簡，得

$$\begin{aligned}\ln h(x) &= (3x+1)\ln 2 + 2\ln\cos x \\ &\qquad -4x\ln(x^2+1)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{1}{h(x)}h'(x) &= 3\ln 2 + 2\tan x \\ &\qquad -4\ln(x^2+1) - \frac{8x^2}{x^2+1}\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}h'(x) &= h(x)\Big[3\ln 2 + 2\tan x \\ &\qquad -4\ln(x^2+1) - \frac{8x^2}{x^2+1}\Big] \\ &= \frac{2^{3x-1}\cos^2 x}{(x^2+1)^{4x}}\Big[3\ln 2 + 2\tan x \\ &\qquad -4\ln(x^2+1) - \frac{8x^2}{x^2+1}\Big]\end{aligned}$$

21. 使用 2 次連鎖規則, 得

$$f'(t) = \frac{1}{2}(t^2 + \sqrt{t+1})^{-1/2}\left(2t + \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right)$$

接著, 根據乘法規則及連鎖規則, 得

$$\begin{aligned} & f''(t) \\ = & -\frac{1}{4}(t^2+\sqrt{t+1})^{3/2}\left(2t+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right)^2 \\ & +\frac{1}{2}(t^2+\sqrt{t+1})^{-1/2}\cdot \\ & \left[2-\frac{1}{4}(t+1)^{-3/2}\right] \end{aligned}$$

22. 根據連鎖規則,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sec(3x^2-1)\cdot \\ &\quad \sec(3x^2-1)\tan(3x^2-1)(6x) \\ &= 12x\sec^2(3x^2-1)\tan(3x^2-1) \end{aligned}$$

23. 根據連鎖規則,

$$\begin{aligned} h'(s) &= (\ln 5)5^{\sqrt{1-\cos 2s}} \cdot \\ &\qquad \frac{1}{2\sqrt{1-\cos 2s}} \cdot \sin 2s \cdot 2 \\ &= \ln 5 \left(\frac{5^{\sqrt{1-\cos 2s}} \sin 2s}{\sqrt{1-\cos 2s}} \right) \end{aligned}$$

24. 代入 $x = 1$, 得

$$\ln y = y \ln 1 = 0$$

故, $y = 1$ 且切點 $(1, 1)$. 接著, 根據隱微分, 得

$$\ln y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\ln x + \frac{y}{x}$$

代入 $(1, 1)$, 得

$$0 + \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(0) + 1$$

即, 切線斜率

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = 1$$

因此, 得切線 $y - 1 = x - 1$, 即 $y = x$.

25. 首先,

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 3}\frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}$$

接著, 令

$$\log_3(\tan 2x) = \frac{1}{2}$$

解 x, 得

$$\tan 2x = \sqrt{3}$$

因此, 根據反函數的導函數公式,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\frac{1}{\ln 3}\frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x}\Big|_{\tan 2x=\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\ln 3 \cdot \sqrt{3}}{2(1+3)} = \frac{\sqrt{3}\ln 3}{8}\end{aligned}$$

26. 根據題意,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dN}{dt}\right|_{t=5} &= \left.N(t)\cdot 0.04\right|_{t=5}\\ &= (200)(0.04)=8\end{aligned}$$

接著, $N(t)$ 在 $t=5$ 的線性化

$$\begin{aligned}L(t) &= N(5)+N'(5)(t-5)\\ &= 200+8(t-5)\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}N(5.1) &\approx L(5.1)\\ &= 200+8(5.1-5)\\ &= 200+8(0.1)=200.8\end{aligned}$$

27. (a) 設在 t 時, 倒立正圓錐的水面高度爲 $h(t)$ 且半徑爲 $r(t)$. 由相似三角形及題意, 得

$$\frac{h}{r}=\frac{12}{4}=3$$

即 $h=3r$. 將水的體積 $V(t)$ 表成 r, 得

$$V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\pi r^3$$

又根據題意, $\frac{dr}{dt}=-2$ (因爲半徑縮小, 需以 "$-$" 表示), 且當 $h=9$ 時, $r=3$. 將上述代入並根據連鎖規則或隱微分, 得水量的變化率爲

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=3,\frac{dr}{dt}=-2} &= \left.\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}\right|_{r=3,\frac{dr}{dt}=-2}\\ &= \left.3\pi r^2\frac{dr}{dt}\right|_{r=3,\frac{dr}{dt}=-2}\\ &= 3\pi(3)^2(-2)=-54\pi\end{aligned}$$

即水量以 54 的速率流出而減少.

(b) 設正圓柱的水面高度爲 $h(t)$. 由題意, 正圓柱內水的體積

$$V(t)=36\pi h$$

根據隱微分或連鎖規則,

$$\frac{dV}{dt}=36\pi\frac{dh}{dt}$$

代入由倒立正圓錐流入的水量變化率 $\frac{dV}{dt}=54\pi$,
得

$$54\pi = 36\pi\frac{dh}{dt}$$

因此, 正圓柱內水面高度的變化率

$$\frac{dh}{dt}=\frac{54}{36}=\frac{3}{2}$$

即水面高度以 $\frac{3}{2}$ 的速率上升.

28. 先確認一物件的長, 深, 高的定義. 面對此物件時, 由左到右的距離爲長, 由前到後的距離爲深, 由下到上的距離爲高. 設左端深處低於 5 呎的高度爲 $h(t)$, 由左到右的水面長度爲 $x(t)$. 由相似三角形及題意, 得

$$\frac{x}{h} = \frac{40}{5}$$

即 $x = 8h$. 將水的體積 $V(t)$ 表成 h, 得

$$V(t) = 20\frac{1}{2}hx = 10h(8h) = 80h^2$$

接著, 根據連鎖規則或隱微分, 得

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = 160h\frac{dh}{dt}$$

最後, 將 $h = 4$ 及 $\frac{dV}{dt} = 10$ 代入, 得

$$10 = 160(4)\frac{dh}{dt}$$

因此,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{64}$$

即左端深處的水面高度以 $\frac{1}{64}$ 呎/分的速率上升.

29. 根據連鎖規則, 將

$$\sec(\sec^{-1} x) = x,\ \ |x| \geq 1$$

兩邊微分, 得 $|x| > 1$ 時,

$$\sec(\sec^{-1} x)\tan(\sec^{-1} x)\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = 1$$

因此, 對於 $|x| > 1$,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{\sec(\sec^{-1} x)\tan(\sec^{-1} x)} \tag{6}$$

因爲 $\sec^{-1} x$ 的值域爲第一及第三象限, 此處 $\tan x$ 爲正, 由三角恆等式

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

得

$$\tan x = \sqrt{\sec^2 x - 1},\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

因此, 將上式代入 $\sec^{-1} x$ 並根據互逆性, 即

$$\sec(\sec^{-1} x) = x$$

由 (6) 式, 得

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}},\ \ |x| > 1$$

30. 首先,

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2},\ x \neq 0$$

雖然 f' 在 $x = 0$ 未定義, 但 $x = 0$ 不在 f 的定義域內, 故無臨界數以及相對極值. 又 f' 的符號圖:

$$(-\infty, 0) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

$$(0, \infty) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

接著,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^{1/x}}{x^4} + \frac{2e^{1/x}}{x^3} \\ &= e^{1/x}\left(\frac{1 + 2x}{x^4}\right) \end{aligned}$$

得反曲點後選數爲 $x = -\frac{1}{2}$. 又 f'' 的符號圖:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) : f'' < 0,\ \text{下凹}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, \infty) : f'' > 0,\ \text{上凹}$$

即過 $x = -\frac{1}{2}$, 凹性改變, 得反曲點

$$\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$$

然後, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

且

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 1$$

得 x 由右邊接近 0 時, 有一垂直漸近線 $x = 0$. 又 $e^{1/x} > 1$ 當 $x > 0$, 且

$$\lim_{x\to \infty} e^{1/x} = 1$$

得 $y = 1$ 爲一水平漸近線且 f 的圖形在 $y = 1$ 之上. 當 $x < 0$ 時, $e^{1/x} < 1$ 且

$$\lim_{x\to -\infty} e^{1/x} = 1$$

得 x 往左無界延伸時, f 的圖形在水平漸近線 $y = 1$ 之下.

最後, 標出反曲點, 垂直及水平漸近線並根據 f' 及 f'' 的符號圖, 由左至右在分割出的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

31. 首先, 根據乘法規則並化簡,

$$f'(x) = x^{-1/3}(6-x)^{-2/3}(4-x)$$

得三個臨界數 $x = 0$, 4, 6, 及 f' 的符號圖:

$$(-\infty, 0) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

$$(0, 4) : f' > 0,\ \text{遞增}$$

$$(4, 6) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

$$(6, \infty) : f' < 0, \text{遞減}$$

因爲過 $x = 6$, 單調性未變, 僅有局部最小值 $(0, 0)$ 以及局部最大值 $(4, 2^{5/3})$.

繼續根據乘法規則並化簡,

$$f''(x) = -8x^{-4/3}(6-x)^{-5/3}$$

得兩個反曲點後選數 $x = 0$, 6, 及 f'' 的符號圖:

$$(-\infty, 0) : f'' < 0,\ \text{下凹}$$

$$(0, 6) : f'' < 0,\ \text{下凹}$$

$$(6, \infty) : f'' > 0,\ \text{上凹}$$

因爲僅過 $x = 6$, 凹性改變, 僅得一反曲點 $(6, 0)$.

因爲 f 連續, 無垂直漸近線. 又

$$\lim_{x\to\infty} x^{2/3}(6-x)^{1/3} = -\infty$$

且

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2/3}(6-x)^{1/3} = \infty$$

亦無水平漸近線.

最後, 標示局部最小值, 局部最大值及反曲點並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在正負無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

32. 首先, 根據乘法規則並化簡,

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

得臨界數 $x = -1$ 及 f' 的符號圖:

$$(-\infty, -1) : f' < 0, \text{ 遞減}$$

$$(-1, \infty) : f' > 0, \text{ 遞增}$$

因此, 有局部最小値 $(-1, -e^{-1})$.

再根據乘法規則並化簡,

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x + (x+1)e^x \\ &= (x+2)e^x \end{aligned}$$

得反曲點後選數 $x = -2$ 及 f'' 的符號圖:

$$(-\infty, -2) : f'' < 0, \text{ 下凹}$$

$$(-2, \infty) : f'' > 0, \text{ 上凹}$$

過 $x = -2$, 凹性改變, 得反曲點 $(-2, -2e^{-2})$.

因爲 f 連續, 無垂直漸近線. 又

$$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$$

且當 $x < 0$ 時, $xe^x < 0$ 並根據羅必達法則

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} xe^x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \end{aligned}$$

得 x 往左無界延伸時, 在水平漸近線 $y = 0$ 之下.

最後, 標示局部最小值, 反曲點及水平漸近線並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在正負無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

33. 因為

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$$

得三個臨界數 $x = -1,\ 0,\ 1$, 及 f' 的符號圖:

$$(-\infty, -1) : f' > 0,\ \text{遞增}$$

$$(-1, 0) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

$$(0, 1) : f' < 0,\ \text{遞減}$$

$$(1, \infty) : f' > 0,\ \text{遞增}$$

因為過 $x = 0$, 單調性未變, 僅得局部最大值 $(-1, 5)$, 局部最小值 $(1, 1)$.

接者,

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$$

得三個反曲點後選數 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}$, 及 f'' 的符號圖:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) : f'' < 0,\ \text{下凹}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) : f'' > 0,\ \text{上凹}$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : f'' < 0,\ \text{下凹}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right) : f'' > 0,\ \text{上凹}$$

因爲過 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 凹性均改變, 得三個反曲點

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 3 + \frac{7}{8}\sqrt{2}\right),\ (0, 3),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{7}{8}\sqrt{2}\right)$$

因爲 f 爲多項式, 無垂直漸近線且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{以及} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

亦無水平漸近線.

最後, 標示局部最小值, 局部最大值, 反曲點並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在正負無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

34. 首先, 根據乘法規則並化簡,

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$$

得二個臨界數 $x = -1$, 0, 及 f' 的符號圖:

$$(-\infty, -1) : f' < 0, \text{ 遞減}$$

$$(-1, 0) : f' > 0, \text{ 遞增}$$

$$(0, \infty) : f' > 0, \text{ 遞增}$$

因爲過 $x = 0$, 單調性未變, 僅得一局部最小值 $(-1, -3)$.

繼續根據乘法規則並化簡,

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-5/2}(x-2)$$

得兩個反曲點後選數 $x = 0$, 2, 及 f'' 的符號圖:

$$(-\infty, 0) : f'' > 0, \text{ 上凹}$$

$$(0, 2) : f'' < 0, \text{ 下凹}$$

$$(2, \infty) : f'' > 0, \text{ 上凹}$$

過 $x = 0$, 2, 凹性均變, 得二個反曲點 $(0, 0)$ 及 $(2, 6\sqrt[3]{2})$.

又 f 連續, 無垂直漸近線, 且

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{以及} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

亦無水平漸近線.

最後, 標示局部最小值, 反曲點並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在正負無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

35. 因爲

$$f(-x)=\frac{\ln|-x|}{-x}=-\frac{\ln|x|}{x}=-f(x)$$

f 爲奇函數. 故先探討 $x>0$ 時, f 的特性, 再根據奇函數對稱原點的性質, 可得 $x<0$ 時, f 的特徵. 首先, 根據除法規則並化簡, 當 $x>0$ 時,

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

僅得一臨界數 $x=e$ 及 f' 的符號圖:

$$(0,e): f'>0,\ \text{遞增}$$

$$(e,\infty): f'<0,\ \text{遞減}$$

由此得一局部最大值 (e,e^{-1}).

繼續根據除法規則並化簡,

$$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

僅得一反曲點後選數 $x=e^{3/2}$ 及 f'' 的符號圖:

$$(0,e^{3/2}): f''<0,\ \text{下凹}$$

$$(e^{3/2},\infty): f''>0,\ \text{上凹}$$

過 $x=e^{3/2}$, 凹性改變, 得一反曲點 $\left(e^{3/2},\frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$.

因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|x|}{x}=-\infty$$

得一垂直漸近線 $x=0$. 又根據羅必達法則,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln|x|}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

得 x 往右無界延伸時, f 的圖形在水平漸近線 $y=0$ 之上.

再根據對稱性, 得一局部最小値, $(-e,-e^{-1})$, 反曲點 $\left(-e^{3/2},-\frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$, 以及

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln|x|}{x}=\infty$$

即 $x=0$ 爲一垂直漸近線且

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x|}{x}=0$$

即 x 往左無界延伸時, f 的圖形在水平漸近線 $y=0$ 之下.

最後, 在 y-軸右邊, 標示局部最小値, 反曲點, 垂直與水平漸近線並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在 x 由右接近 0 以及在正無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 在 y-軸右邊的圖形. 再根據對稱原點的性質, 可繪出 f 在 y-軸左邊的圖形.

36. 根據除法規則並化簡,

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

恆大於 0, 無臨界數, 故無局部極值且恆遞增.

再根據除法規則並化簡,

$$f''(x) = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2+1)^3}$$

得三個反曲點後選數 $x = -\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$, 及 f'' 的符號圖:

$$(-\infty, -\sqrt{3}) : f'' > 0, \text{ 上凹}$$

$$(-\sqrt{3}, 0) : f'' < 0, \text{ 下凹}$$

$$(0, \sqrt{3}) : f'' > 0, \text{ 上凹}$$

$$(\sqrt{3}, \infty) : f'' < 0, \text{ 下凹}$$

過 $x = -\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$, 凹性均變, 得三個反曲點 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

f 恆連續, 無垂直漸近線. 又

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = -\infty$$

故無水平漸近線. 因爲

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

得

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x}{x^2+1} = 0$$

故 x 由 $x = 0$ 向左無界延伸時, f 的圖形在斜漸近線 $y = x$ 之上且 x 由 $x = 0$ 向右無界延伸時, f 的圖形在斜漸近線 $y = x$ 之下.

最後, 標示反曲點, 斜漸近線並根據 f', f'' 的符號圖以及 f 在正負無窮遠的行爲, 由左至右在分割的區間內, 以平滑曲線繪出 f 的圖形.

37. 設 $f(x) = \sqrt{1+x}$. 對於所有的 $x > 0$, f 在 $[0, x]$ 上連續且在 $(0, x)$ 上可微, 所以根據均值定理, 存在 $c \in (0, x)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \sqrt{1+x} - 1 \\ &= f'(c)(x-0) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+c}}x < \frac{x}{2} \end{aligned}$$

上式不等號成立, 因爲 $c > 0$, $\frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$ 且同乘 $x > 0$, 不等號方向不變所致. 移項整理, 得

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2},\ x > 0$$

38. 對每一 $b>0$, f 在 $[-b,b]$ 上連續且在 $(-b,b)$ 上可微, 根據均值定理, 存在 $c\in(-b,b)$ 使得

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b)-f(-b)}{b-(-b)} \\ &= \frac{f(b)-f(-b)}{2b} \end{aligned}$$

又 f 爲奇函數, $f(-b)=-f(b)$. 代入上式,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b)-(-f(b))}{2b} \\ &= \frac{2f(b)}{2b}=\frac{f(b)}{b} \end{aligned}$$

39. 設 $f(x) = \ln(1+x)$. 對於 $x > 0$, f 在 $[0, x]$ 上連續且在 $(0, x)$ 上可微, 故根據均值定理, 存在 $c \in (0, x)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} &= f'(c) \\ &= \frac{1}{1+c} \end{aligned}$$

即

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}, \; c \in (0, x), \; x > 0$$

因為 $0 < c < x$,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$$

最後, 代入, 得

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1, \; x > 0$$

40. 設 $f(x) = \ln(1+x^2)$. 對於 $x > 0$, f 在 $[0, x]$ 上連續且在 $(0, x)$ 上可微, 所以根據均值定理, 存在 $c \in (0, x)$ 使得

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= f'(c) \\ &= \frac{2c}{1+c^2} \end{aligned}$$

即

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \frac{2c}{1+c^2}, \quad 0 < c < x \tag{7}$$

因爲 $c > 0$, 明顯地, $\dfrac{2c}{1+c^2} > 0$. 又

$$\frac{2c}{1+c^2} \leq 1$$

此乃因爲上式等價於

$$1 + c^2 \geq 2c$$

相當於

$$c^2 - 2c + 1 \geq 0$$

即

$$(c-1)^2 \geq 0$$

此乃恆成立. 合併, 得

$$0 < \frac{2c}{1+c^2} \leq 1, \ c > 0$$

代入 (7) 式, 得

$$0 < \frac{\ln(1+x^2)}{x} \leq 1, \ x > 0$$

因為 $x > 0$, 亦相當於

$$0 < \ln(1+x^2) < x, \ x > 0$$

此外, 當 $x = 0$,

$$0 = \ln(1+0^2) = 0$$

恆成立. 合併, 得

$$0 \leq \ln(1+x^2) \leq x, \ x \geq 0$$