期末練習題(104下)

1. 設 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{4x}{x+y^2}, & x\neq -y^2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 試求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 並問 f 在 $(0,0)$ 連續嗎? 可微嗎? 理由? 解. 極限不存在; 不連續; 不可微

2. 設 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 試求 $f_x(0,0)$ 與 $f_y(0,0)$ 並問 f 在 $(0,0)$ 可微嗎? 理由? 解. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$; 不可微

3. 試求 $\mathbf{f}(x,y)=\begin{bmatrix} xe^{xy} \\ \ln(x-2y)\end{bmatrix}$ 在 $(1,0)$ 的線性近似 $\mathbf{L}(x,y)$ 並估計 $\begin{bmatrix} 1.1e^{-0.11} \\ \ln(1.3)\end{bmatrix}$.
解. $\mathbf{L}(x,y)=\begin{bmatrix} x+y \\ x-2y-1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.3\end{bmatrix}$

4. 試求 $f(x,y)=\sqrt{xy-2x^2}$ 在點 $(1,6)$ 朝向點 $(-1,11)$ 的方向導數, 並問在點 $(1,6)$ 時, 朝向

哪一個方向 f 減少最快?

解. $\frac{1}{4\sqrt{29}}$; 朝向 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 時減少最快

5. 試求所有的點使得在其上朝向 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向時,
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ 增加最快.
解. $\{(x,y) | y = x+1, x > 1\}$

6. 試求滿足微分方程式系統

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 7x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 5x_2$$

以及初始條件 $x_1(0) = 13, x_2(0) = 3$ 的特殊解.

解. $x(t) = 2e^{2t}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} - e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. 試求微分方程式系統

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2$$

的一般解，平衡點並判斷平衡點的穩定性.

解. $x(t)=c_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+c_2e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; 平衡點 $(0,0)$，鞍點

8. 試求二階微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=2x$ 滿足初始條件 $x(0)=6, x'(0)=0$ 的特殊解.

   解. $x(t)=4e^t+2e^{-2t}$

9. 試求微分方程式系統

$$\frac{dx_1}{dt}=4x_1(1-x_1)-2x_1x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_2(2-x_2)-x_2$$

   的所有平衡點並判斷平衡點的穩定性.

   解. 平衡點 $(0,0)$，泉源口，不穩定節點; $(0,1)$，鞍點; $\left(\frac{1}{2},1\right)$，水槽口，穩定節點; $(1,0)$，鞍點

10. 試求所有使得微分方程式系統

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2(x_1+a)$$
$$\frac{dx_2}{dt}=x_2^2+x_2-x_1$$

有唯一平衡點的 a 值並求此平衡點且判斷平衡點的穩定性.
解. $a>\frac{1}{4}$; 平衡點 $(0,0)$, 不穩定螺旋點

11. 設一異物種間的競爭模型爲

$$\frac{dN_1}{dt}=2N_1\left(1-\frac{N_1}{20}-\frac{N_2}{5}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt}=3N_2\left(1-\frac{N_2}{15}-\frac{N_1}{75}\right)$$

試根據 “物種 1 淘汰物種 2”, “物種 2 淘汰物種 1”, “共存” 或 “起始點掌控”, 將此模型分類.
解. 物種 2 淘汰物種 1

12. 試求一掠食者與獵物系統

$$\frac{dN}{dt}=N\left(1-\frac{N}{10}\right)-4PN$$
$$\frac{dP}{dt}=PN-5P$$

的所有平衡點並判斷平衡點的穩定性.
解. 平衡點 $(0,0)$, 鞍點; $(10,0)$, 鞍點; $\left(5,\frac{1}{8}\right)$, 穩定螺旋點

13. 試求 $\int_0^1\int_y^1 \frac{y}{1+x^3}dxdy$. 解. $\frac{1}{6}\ln 2$

14. 試求

$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{x/\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dydx + \int_{\sqrt{3}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{1+x^2+y^2}dydx$$

解. $\frac{\pi}{12}\ln 5$

15. 試求 $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\arccos y}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dxdy.$

解. $\sqrt{2}-1$

16. 試求上半球面 $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ 在圓柱 $x^2+y^2-4y=0$ 內的面積. 解. $16\pi-32$

17. 試求 $\displaystyle\int_{1/2}^1\int_{1-x}^{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx.$

(提示: $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$, $\displaystyle\int\sec\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$, 以及極坐標積分.)

解. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln(\sqrt{2}+1)$

18. 試求 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$ (提示: 計算 $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA$, 其中 R 爲第一象限.)
解. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

19. 設 R 爲 $xy=1$, $xy=4$, $x=1$ 與 $x=4$ 所圍出的區域. 試求 $\iint_R xye^{1+x^2y^2}dA.$
解. $(e^{17}-e^2)\ln 2$

20. 試求 $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA$, 其中 R 是以 $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ 與 $(0,1)$ 爲頂點的梯形區域.
解. $\frac{3}{2}\sin 1$

21. 試求函數 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在單位圓上所形成的曲面面積. 解. $\sqrt{2}\pi$