補充單元 5: 三重積分

令 Q 爲空間中的一有界實體, 且三變數函數 $f(x,y,z)$ 在 Q 上連續. 令 Δ 爲 Q 的分割, 得 n 個小方塊 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, 且 $\|\Delta\|$ 爲此 n 個小方塊中最大的對角線長度, 如圖示. 對於 $i = 1, 2, \ldots, n$, 第 i 個小方塊 Q_i 的體積 $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. 因此, 類似於雙變數函數的情形, 三變數函數 $f(x,y,z)$ 在實體 Q 上的三重積分

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV \overset{\text{def}}{=} \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

當極限存在時. 此外,

$$Q \text{ 的體積} \overset{\text{def}}{=} \iiint_Q dV$$

亦即, 當 $f(x,y,z) = 1$ 時的三重積分就是 Q 的體積, 與直觀相符. 由 Fubini 定理, 若實體

$$Q : \begin{cases} a \le x \le b \\ h_1(x) \le y \le h_2(x) \\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \end{cases}$$

則三重積分

$$\begin{aligned} &\iiint_Q f(x,y,z)\,dV \\ &= \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \end{aligned}$$

一個先對 z, 再對 y, 最後對 x 的逐次積分. 若實體

$$Q:\begin{cases} c\le y\le d\\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\\ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\end{cases}$$

則三重積分

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

一個先對 z, 再對 x, 最後對 y 的逐次積分. 合計有 6 種不同的積分次序.

例 1. 試求橢圓體 $4x^2+4y^2+z^2=16$ 的體積.

<解> 根據對稱性, 可先求第一卦限內 Q_1 的體積, 如圖示. 因爲 Q_1 在 xy-平面上的投影爲

$$4x^2+4y^2\le 16,\ x\ge 0, y\ge 0$$

亦相當於

$$x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0$$

又因爲實體 Q_1 的底部及頂部分別爲曲面

$$z=0,\ x^2+y^2\le 4$$

及

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2}$$

故 Q_1 可表示成

$$Q_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \le z \le \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} \end{cases}$$

因此, 根據體積的定義以及 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} & Q_1 \text{ 的體積} \\ = \ & \iiint_{Q_1} dV \\ = \ & \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-4x^2-4y^2}} 1 dz dy dx \\ = \ & \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} \, dy dx \end{aligned}$$

因爲上式中的積分區域亦可表示成 θ-簡單區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$

以及被積函數缺少所需的 x 或 y 而無法直接以代入法對 x 或 y 逐次積分, 故需透過極坐標型式的變數變換

$$x = r\cos\theta, \ \ y = r\sin\theta, \ \ dxdy = r dr d\theta$$

將上式改寫爲

$$
\begin{aligned}
Q_1 \text{ 的體積} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{16-4r^2}\, r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\, r\,dr\,d\theta
\end{aligned}
$$

再根據代入法

$$
u = 4 - r^2 \;\Rightarrow\; du = -2r\,dr
$$

由上式得

$$
\begin{aligned}
&Q_1 \text{ 的體積} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{16}{3} d\theta = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\text{橢圓體的體積} &= 8\cdot(Q_1 \text{ 的體積}) \\
&= 8\cdot\frac{8\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}
\end{aligned}
$$

例 2. 試計算逐次積分

$$
\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_x^{\sqrt{\pi/2}}\int_1^3 \sin y^2\, dz\,dy\,dx
$$

<解> 按照給定的積分次序, 先對 z 積分, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \sin y^2 \cdot z\Big|_1^3 dydx \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} 2\sin y^2 dydx \qquad (1)
\end{aligned}$$

因爲 (1) 式的被積函數中缺少以代入法對 y 積分所需的 y, 故需改變積分次序. 首先, 根據 (1) 式的積分極限, 得積分區域

$$R: \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{\pi/2} \\ x \le y \le \sqrt{\pi/2} \end{cases}$$

乃一垂直簡單區域, 如圖示. 又此垂直簡單區域亦可以水平方式表示成

$$R: \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{\pi/2} \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

故根據 Fubini 定理, 可將 (1) 式改寫成一個先對 x 再對 y 的逐次積分, 亦即,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{y} 2\sin y^2 dxdy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2\sin y^2 \cdot x\Big|_{x=0}^{y} dy \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2y\sin y^2 dy
\end{aligned}$$

再根據代入法

$$u = y^2 \ \Rightarrow \ du = 2dy$$

由上式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\cos y^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 \\ &= -0 + 1 = 1 \end{aligned}$$