單元 9: 微分的基本定義
(課本 §4.1)

一. 簡介: 設一成長模型 (growth model) 表示某族群 (population, 群體) 在 t 時的大小 (size) 爲

$$N(t) = 200\frac{t}{t+1}, t \geq 0$$

如圖所示.

在時間區段 $[t, t+h]$ 內的平均成長率 (average growth rate) 如下:

$$\begin{aligned}\text{平均成長率} &= \frac{\text{族群大小的改變量}}{\text{時間的改變量}}\\ &= \frac{N(t+h)-N(t)}{t+h-t}\\ &= \frac{N(t+h)-N(t)}{h}\\ &\overset{\text{表成}}{=} \frac{\Delta N}{\Delta t}\end{aligned}$$

註 1. Δ 爲 Delta 的大寫, 表示量差 (difference). 所以, $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ 表示在時間量差 Δt 內, 族群大小的平均變化情形.

註 2. 從圖形可得幾何上的意義: $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ 爲過二點 $P\left(t, N(t)\right)$ 與 $Q\left(t+h, N(t+h)\right)$ 的割線斜率.

註 3. 瞬間成長率 (instantaneous growth rate) 可定義成當時間量差 $\Delta t \to 0$ 時, 族群大小的變化. 因此, 以極限的表示法可得

$$\text{瞬間成長率} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

瞬間成長率的幾何意義如下:

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \text{點 } Q \to \text{點 } P$$

此乃相當於

$$\text{過 } PQ \text{ 的割線} \to \text{過 } P \text{ 切線}$$

亦相當於

$$\text{割線的斜率 } \frac{\Delta N}{\Delta t} \to \text{切線的斜率}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\text{在 } t \text{ 時的瞬間成長率} \\
&\qquad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} \\
&\qquad \overset{\text{def}}{=} \text{過點 } P\left(t, N(t)\right) \text{ 的切線的斜率}
\end{aligned}$$

將此極限值記成 $N'(t)$ (讀作 N prime of t), 並稱其爲 $N(t)$ 的導函數 (derivative, 衍生物), 亦即,

$$N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

二. 導函數的正式 (嚴密) 定義

定義 1. (導函數的定義). 函數 f 在 x 的導函數, 記作 $f'(x)$, 定義爲

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

若極限存在的話.

註 1. 若 $f'(x)$ 存在 (亦即, 極限存在), 則稱 f 在 x 是可微的 (differentiable at x).

註 2. 幾何意義: 導函數 $f'(x)$ 爲過點 $(x, f(x))$ 的圖形切線斜率. 如圖所示,

$$\text{割線斜率} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

稱作量差商 (difference quotient). 取量差商的極限可得, 當量差 $\Delta x \to 0$ 時,

$$切線斜率 \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

註 3. 導函數定義的另類表示法:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \end{aligned}$$

令

$$c + h = x$$

以及

$$h \to 0 \Leftrightarrow x \to c$$

可證得上式的第二個等號成立. 此種另類表示法強調出當 $x \to c$ 時, 點 $(x, f(x)) \to$ 點 $(c, f(c))$. 在有些情況下, 以此另類表示法較易證出 (看出) 結果.

註 4. 慣用法: 令 $y = f(x)$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

都表示 f 在 x 的導函數.

$\frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$: 萊布尼茲符號 (Leibnize notation)

f 在 $x=c$ 的導數: $f'(c) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$

例 1. 求 $f(x)=x^2$ 在點 $(1,1)$ 上的切線.

<解> 切點: $(1,1)$

切線斜率: 由導函數的幾何意義, 切線斜率為 f 在 $x=1$ 的導函數

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2+h)=2
\end{aligned}
$$

所以, 根據點斜式, 切線如下:

$$y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$$

例 2. 求下列各函數的導函數 $f'(x)$.

(a) $f(x) = a$, a: 常數

(b) $f(x) = mx + b$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x \neq -2$

<解> 根據導函數的定義, 亦即量差商的極限, 分別計算如下.

(a) 根據定義,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

註. 常數函數的導函數恆爲 0. 符合幾何上的意義: 常數函數爲一水平線, 其切線就是此水平線, 故

$$\text{切線斜率} = 0 = f'(x)$$

(b) 由定義, 也就是量差商的極限,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} m = m \end{aligned}$$

註. $y = mx + b$ 爲一直線, 也是其切線. 故

$$\text{切線斜率} = m = f'(x)$$

(c) 同 **(a)** 與 **(b)**, 計算量差商的極限. 首先, 列出量差商, 得量差商

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h+2}-\frac{1}{x+2}}{h}$$

接著, 將上式等號右邊繁分數的分子通分並化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\cdot\frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)} \\ &= \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} \end{aligned}$$

最後, 再取極限, 可導出, 當 $x \neq -2$ 時,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} \\ &= \frac{-1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

註. 導函數 $f'(x)$ 本身亦爲一 x 的函數.

三. 導函數的另一涵義: 瞬間變化率 (Instantaneous Rate of Change).

(i) 速度 (velocity): 設在一直線上騎自行車, 經過 t 時後, 距起點的距離由如下的位置函數 (position function) 表示:

$$s(t) = -t^3 + 6t^2,\ 0 \le t \le 6$$

如圖示. 一些相關的結論如下:

在 $[2,4]$ 間的平均變化率 (average rate of change):

$$\begin{aligned} \frac{s(4)-s(2)}{4-2} &= \frac{(-64+96)-(-8+24)}{2} \\ &= \frac{32-16}{2} = 8 \text{ 英里/小時} \end{aligned}$$

在 $[t, t+h]$ 間的平均變化率:

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{(t+h)-t} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

在瞬間 t 的變化率 (instantaneous rate of change), 又稱作速度:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\\ &= s'(t) = \frac{ds}{dt}\end{aligned}$$

其幾何意義: 在點 $(t, s(t))$ 的切線斜率.

由圖形得知的導函數 $s'(t)$ 與原函數 $s(t)$ 之間的關係如下:

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} > 0$: 遠離起點 ($s(t)\uparrow$)

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=5} < 0$: 靠近起點 ($s(t)\downarrow$)

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 0$: 折回 ($s(t)$ 不增減)

所以, 速度是有方向的而

$$\text{速率 (speed)} \stackrel{\text{def}}{=} \left|s'(t)\right| = \left|\text{速度}\right|$$

僅度量瞬間變化率的量.

(ii) 族群成長 (population growth): 令 $N(t)$ 爲族群在 t 時的大小, 則

$$\begin{aligned}\text{在 } t \text{ 時的瞬間變化率} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{N(t+h)-N(t)}{h} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} \\ &= \frac{dN}{dt} = N'(t)\end{aligned}$$

但是經常以每單一個體的成長率來敍述整個群體的成長率, 稱其爲瞬間個體成長率 (instantaneous per capita growth rate), 定義如下:

$$\text{瞬間個體成長率} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$$

(iii) 化學反應率 (rate of chemical reaction):

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} \to \mathsf{AB}$$

$$\text{反應率 } R = k[\mathsf{A}][\mathsf{B}]$$

若 $[\mathsf{AB}] = x$, 則 $[\mathsf{A}] = a - x$, $[\mathsf{B}] = b - x$, 其中 a, b 分別爲 A 與 B 的最初濃度. 所以,

$$R(x) = k(a-x)(b-x) \tag{1}$$

其中 $0 \le x \le \min(a, b)$, 如圖示. 又反應率 $R(x)$ 表示產品的濃度 x 隨著時間 t 的改變而變化的速度, 亦即, 當 $x = x(t)$ 時,

$$R(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

所以, 比較上式與 (1) 式, 得

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{2}$$

稱作一微分方程式 (differential equation) (一含有函數的導函數的方程式), 其解爲滿足 (2) 式的函數.

註. 微分方程式的解有時可明確地求出; 即使無法求出, 微分方程式本身也會提供有用的訊息.

(iv) 棣爾曼氏資源競爭模型 (Tilman's Model for Resource Competition)

設一草原棲息地 (grassland habitat) 的狀態如下:

(a) 有限資源: 氮 (nitrogen), 增加氮 ⇒ 生物質量 (biomass) 的增加

(b) 單一物種與單一有限資源的競爭

(c) 生物質量變化率 = 成長率 (rate of growth) − 消失率 (rate of loss)

令 $B(t)$ 爲在 t 時, 整個植物族群的生物質量. 設 R 爲資源水平 (resource level), $f(R)$ 爲單位生物質量成長率, 且常數 m 爲單位生物質量消失率. 則, 由上述的狀態 (c), 得單位生物質量變化率

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = f(R) - m$$

若假設取

$$f(R) = a\frac{R}{k+R}$$

其中 a, k 爲常數 , 可得微分方程式

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = a\frac{R}{k+R} - m$$

先不去解 $B(t)$, 但觀察上述微分方程式所提供的訊息如下述.

首先, 繪出 $f(R)$ 與常數 m 的圖形, 可知

(1) 在 R^*: $f(R) = m \Leftrightarrow \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} = 0$, 亦即, 成長率 = 消失率 $\Leftrightarrow$ 生物質量不改變. 此時, 稱生物質量在一平衡狀態 (equilibrium).

(2) $R < R^* \Rightarrow f(R) - m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} < 0 \Rightarrow$ 生物質量減少.

(3) $R > R^* \Rightarrow f(R) - m > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{B}\frac{dB}{dt} > 0 \Rightarrow$ 生物質量增加.

接著, 問 R^* 爲何?

根據 R^* 的定義,

$$f(R^*) = m$$

所以,

$$a\frac{R^*}{k + R^*} = m$$

兩邊同乘 $k + R^*$, 得

$$aR^* = mk + mR^*$$

合併含 R^* 的項, 並解之, 得

$$R^* = \frac{mk}{a - m}$$

註. 即使在不去求眞正解的情形下, 微分方程式的平衡點就可提供許多直觀性的訊息. 而平衡點又是較易求得的. 因此, 有關平衡點的探討也是一重要且有趣的主題, 會在以後的單元中陸續介紹.

四. 可微與連續

定理 1. 若 f 在 $x=c$ 可微, 則 f 在 $x=c$ 一定連續 (亦即, 連續性是可微性的必要條件).

<證> 因爲 f 在 $x=c$ 可微, 所以根據導函數的定義 (此處採用另類的定義)

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ 存在}$$

欲證明 f 在 $x=c$ 連續, 根據連續性的定義, 相當於要證明

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

此乃相當於

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=0$$

而

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]\\
&\quad=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\\
&\quad=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c}(x-c)\\
&\quad=f'(c)\cdot 0=0, \text{ 得證.}
\end{aligned}$$

註 1. 由定理 1 知, 與其等價的敍述爲: f 在 $x=c$ 不連續, 則 f 在 $x=c$ 不可微. (提供一個判定函數不可微的方法, 亦即, 只要判斷出此函數是不連續就可斷定出它是不可微.) 如圖,

f 在 $x=c$ 不可微, 因爲圖形在 $x=c$ 斷開, 在此點不連續.

註 2. f 在 $x=c$ 連續不一定保證 f 在 $x=c$ 是可微的 (亦即, 連續性不是可微性的充分條件). 例如下述的兩個反例.

1. $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$
   如圖示.

   根據圖形知, 在 0 右邊的割線均爲 $y=x$ 且

   $$y=x \rightarrow y=x$$

   在 0 左邊的割線均爲 $y=-x$ 且

   $$y=-x \rightarrow y=-x$$

   它們不是同一條直線. 所以, 在 $x=0$ 無切線. 因此, 切線斜率 $=f'(0)$ 不存在, 亦即, f 在 $x=0$ 不可微, 雖然 f 在 $x=0$ 是連續的.

或由定義,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ 不存在}$$

爲何如此? 上式的右極限

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} &\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

但左極限

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} &\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1\end{aligned}$$

得, 右極限 $\neq$ 左極限. 故, $f'(0)$ 不存在.

註 3. 在轉角處 (corner), f 不可微, 如圖示.

註 4. 連續性表示函數的圖形沒有斷開的現象, 而可微性表示函數的圖形是平滑的 (smooth); 從直觀上來看, 也是平滑 (可微) 保證不斷開 (連續), 但不斷開 (連續) 卻不能保證平滑 (可微), 如圖示. 也就是說, 可微性是一個比較強的結果. 另從經驗上, 將

註 3 圖示中的函數視爲一位置函數 $y = s(t)$, 則在轉角處相當於一個急速回轉 (或急速倒退, 因爲反方向), 即使車子依然在地上行進 (連續), 但對於乘客而言卻是一種狀態的驟變, 不平穩 (不可微).

2. $f(x) = x^{1/3}, -\infty < x < \infty$

如圖示.

圖形顯示在 $x = 0$ 有一鉛垂切線, 故由導函數的幾何意義, 切線斜率 $f'(0)$ 不存在. 因此, 函數 f 在點 $x = 0$ 不可微, 雖然 f 在 $x = 0$ 是連續的.

或根據定義,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty, \text{ 不存在} \end{aligned}$$

註 5. 若將此函數視爲一位置函數, 雖然在 0 附近車子依然在地上移動 (連續), 但卻是緊急地加油門及

緊急煞車 (因爲同方向), 對乘客而言也是一種不平穩的狀態 (不可微).