單元 7: 連續性
(課本 §3.2)

直觀上: 函數的圖形沒有斷裂的現象時, 就稱此函數爲連續.

觀察一些不連續的現象, 再提出連續的嚴密定義, 如圖示.

圖形在 x_1, x_2, x_3, x_4 有斷裂的現象, 原因如下:

- x_1 : f 在 x_1 沒定義 (undefined at x_1); 雖然
$$\lim_{x \to x_1} f(x) = 1$$

- x_2 : $f(x_2) = 4$ (在 x_2 有定義); 但
$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = 4 \neq 3 = \lim_{x \to x_2^+} f(x)$$
亦即,
$$\lim_{x \to x_2} f(x)$$
不存在.

- x_3：f 在 x_3 沒定義且

  $$\lim_{x\to x_3} f(x) = \infty$$

  極限不存在.

- x_4：$f(x_4) = 5$ (在 x_4 有定義) 且

  $$\lim_{x\to x_4} f(x) = 2$$

  極限存在, 但

  $$\lim_{x\to x_4} f(x)\ (\text{極限值}) \neq f(x_4)\ (\text{函數值})$$

定義. 函數 f 在點 $x = c$ 連續 (continuous at $x = c$) 若且爲若

(i) $f(x)$ 在 $x = c$ 有定義 (亦即, $f(c)$ 爲一實數)

(ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ 存在

(iii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (即, 極限值 $=$ 函數值)

註 1. 定義中之 (i)-(iii) 可合併化簡成

$$\text{(iv)}\quad \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

由此可得出等價的 ϵ-δ 定義, 如註 4.

註 2. 兩個引申出的單邊連續性定義:

$$f:\ \text{在 } c \text{ 點右連續} \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

以及

$$f:\ \text{在 } c \text{ 點左連續} \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$$

如圖示.

註 3. 非連續點 (discontinuous point) c 可被分成二類:

1. 可移除的非連續點 (removable discontinuous point):

   $$\lim_{x\to c} f(x) \text{ 存在}$$

   但

   $$\text{不等於 } f(c) \text{ (或 } f \text{ 在 } x = c \text{ 無定義)}$$

只要重新令

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

即可使得 c 變爲連續點. 如,

- x_1: 令 $f(x_1) = 1$
- x_4: 令 $f(x_4) = 2$

都會使得新函數在 x_1 與 x_4 都連續.

2. 不可移除的非連續點 (nonremovable discontinuous point):

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ 不存在}$$

所以, 無法重新定義 $f(c)$ 使得

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

如,

- x_2: $\lim_{x \to x_2} f(x)$ 不存在
- x_3: $\lim_{x \to x_3} f(x)$ 不存在

例 1. 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-3}, & 若\ x \neq 3 \\ 7, & 若\ x = 3 \end{cases}$$

問 f 在 $x = 3$ 連續嗎? 若不連續, 能否重新定義 $f(3)$ 使其連續?

<解> 根據定義逐步檢查如下:

(i) $f(3) = 7 \quad \surd$

(ii) 求在 $x = 3$ 的極限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} f(x) &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} (x+2) = 5 \quad \surd \end{aligned}$$

(iii) 但 $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3) \quad \times$

所以, $x = 3$ 爲一非連續點.

因爲

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5,\ 存在$$

所以, 重新令 $f(3) = 5$, 則

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

因此, $x = 3$ 是一可移除的非連續點 (removable discontinuous point), 如圖示.

例 2. 令高斯函數

$$\begin{aligned} f(x) &= [x] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{小於或等於 } x \text{ 的最大整數} \end{aligned}$$

又稱作地板函數 (floor function), 表成 $\lfloor x \rfloor$, 如

$$f(0.5) = 0,\ [1.7] = 1,\ f(-1.5) = -2$$

$$f(2) = 2,\ \lfloor -3 \rfloor = -3,\ \ldots$$

試證 f 在所有整數點上都不連續 (但卻是右連續) 且在其餘點上都連續.

<證> 如圖示, 可清楚地得知所要證明的結論.

嚴格的證明如下: 根據連續性的定義逐步檢查. 首先,
(a) 設 k 爲一任意的整數, 則

(i) $f(k) = [k] = k \quad \checkmark$

(ii) 在 $x = k$ 的右極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k^+} f(x) &= \lim_{x\to k^+} [x] \\ &= \lim_{x\to k^+} k \\ &\quad (\text{因爲 } x \to k^+ \Rightarrow \\ &\quad\ x > k \text{ 且 } x < k+1, \text{ 如圖示}) \\ &= k\end{aligned}$$

在 $x = k$ 的左極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to k^-} [x] &= \lim_{x\to k^-} (k-1) \\ &\quad (\text{因爲 } x \to k^- \Rightarrow \\ &\quad\ x > k-1 \text{ 且 } x < k, \text{ 如圖示}) \\ &= k-1\end{aligned}$$

因爲左極限不等於右極限, 故

$$\lim_{x\to k} [x] \text{ 不存在} \quad \times$$

所以, $[x]$ 在任一整數點 k 上不連續.

又由上述在 k 的函數值及右極限, 得

$$\lim_{x\to k^+} [x] = k = [k]$$

因此, $[x]$ 在任一整數 k 上都是右連續 (雖然不是連續).

(b) 設 c 爲任一不爲整數的實數, 則 c 一定介於某二連續整數間, 例如

$$N-1<c<N$$

如圖示, 則

(i) $f(c)=[c]=N-1 \quad \surd$

(ii) 在 $x=c$ 的右極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^+}[x] &= \lim_{x\to c^+}(N-1)\\ &\quad (\text{因爲 } x\to c^+ \Rightarrow\\ &\quad x<N \text{ 且 } x>N-1)\\ &= N-1\end{aligned}$$

在 $x=c$ 的左極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^-}[x] &= \lim_{x\to c^-}(N-1)\\ &\quad (\text{因爲} x\to c^- \Rightarrow\\ &\quad x>N-1 \text{ 且 } x<N)\\ &= N-1\end{aligned}$$

因為左極限等於右極限, 故

$$\lim_{x\to c}[x] = N-1 \quad \surd$$

(iii) 根據 (i) 與 (ii), 得

$$\lim_{x\to c}[x] = [c] \quad \surd$$

因此, $[x]$ 在任一不為整數的實數 c 上都連續.

性質 1. 設 a 為一常數且 f 與 g 在 $x=c$ 上均連續, 則

(i) af

(ii) $f \pm g$

(iii) $f \cdot g$

(iv) $\dfrac{f}{g}$ 當 $g(c) \neq 0$

均在 $x=c$ 上連續 (由極限的性質可證得, 略).

性質 2. 若 g 在 $x=c$ 連續且 f 在 $g(c)$ 連續, 則合成函數 $f \circ g$ 在 $x=c$ 就是連續的, 如圖示.

爲何如此? 根據連續性的定義驗證如下:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f\circ g)(x) &= \lim_{x\to c} f(g(x)) \\
&= \lim_{y\to g(c)} f(y) \\
&\quad \text{令 } y=g(x) \text{ 且因爲 } g \text{ 在 } c \\
&\quad \text{連續, 故} \\
&\quad x\to c \Rightarrow y=g(x)\to g(c) \\
&= f(g(c)) (\text{因爲 } f \text{ 在 } g(c) \text{ 連續}) \\
&= f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = (f\circ g)(c)
\end{aligned}
$$

得 $f\circ g$ 在 $x=c$ 的極限值等於函數值. 因此, $f\circ g$ 在 $x=c$ 是連續的.

性質 3. 下列各函數在其有定義的點上都是連續的.

1. 多項式函數 (因爲 $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$)

2. 有理函數 (因爲 $\lim_{x\to c} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$, 當 $q(c)\neq 0$)

3. 冪函數

4. 三角函數

5. 指數函數: a^x, $a > 0$ 且不等於 1

6. 對數函數: $\log_a x$, $a > 0$ 且不等於 1

例 3. 求下列各函數的連續點.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$

(b) $f(x) = \sqrt[6]{x}$

(c) $f(x) = 2\ln(x + 2)$

(d) $g(x) = e^{-x^2}$

(e) $h(x) = \dfrac{1}{1 + 2x^{\frac{1}{3}}}$

<解> (a) $f(x)$ 爲一有理函數且在 $x=2$ 沒定義. 所以, 除 2 以外, $f(x)$ 均連續.

(b) $f(x)$ 爲一冪函數且在 $x \geq 0$ 時有定義. 因此, $f(x)$ 僅在 $x \geq 0$ 時是連續的.

(c) $f(x)$ 爲一對數函數且定義在

$$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$$

所以, $f(x)$ 在 $x>-2$ 時連續.

(d) $g(x)$ 爲 e^x 與 $-x^2$ 的合成函數. 故其連續點須由組成的二函數的連續點共同決定, 過程如下: 首先

1. $-x^2$: 對所有的實數 x 都連續, 其值域爲非正實數

2. e^x: 對所有的實數 x 均連續, 當然包含 $-x^2$ 的值域

故, 根據性質 2, 合成函數 $g(x)=e^{-x^2}$ 對所有的實數 x 均連續.

(e) $h(x)$ 爲 $1+2x^{\frac{1}{3}}$ 與 $\frac{1}{x}$ 的合成函數. 同 (d), 其連續點須由組成的二函數的連續點共同決定, 過程如下:
首先

1. $1+2x^{\frac{1}{3}}$: 對所有的實數 x 都連續, 其值域亦爲所有的實數

2. $\frac{1}{x}$: 僅對所有的非零實數 (亦即, $x \neq 0$) 連續

所以, 根據性質 2, $h(x)$ 僅在那些使得 $\frac{1}{x}$ 在半成品上連續的點 x 上連續, 亦即, 僅在那些使得半成品

$$1+2x^{\frac{1}{3}} \neq 0$$

的點 x 上連續. 化簡後, 相當於在

$$x \neq \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

時才連續. 因此, $h(x)$ 在 $x = -\frac{1}{8}$ 以外的所有實數點上均連續.

或

$$\frac{1}{1+2x^{\frac{1}{3}}}$$

在

$$1+2x^{\frac{1}{3}}=0$$

未定義, 亦相當於在

$$x=-\frac{1}{8}$$

未定義. 所以, $h(x)$ 在 $x=-\frac{1}{8}$ 時不連續外, 在所有其餘點上均連續.

註 4. 連續的 ϵ-δ 定義. 根據前述的定義, 需

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

成立. 因此, 函數 $f(x)$ 在點 $x=c$ 連續若且爲若對任意的 $\epsilon>0$, 都存在一對應的 $\delta>0$, 使得

$$\text{當 } |x-c|<\delta \text{ 時, } |f(x)-f(c)|<\epsilon$$

註 5. 連續函數合成的連續性質可推廣成連續函數合成的極限性質. 若

$$\lim_{x\to c} g(x)=L$$

且

$$f(x) \text{ 在 } x=L \text{ 連續}$$

則

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

即連續合成的極限等於極限的合成.

<證> 仿照前述合成連續性質的證明, 令 $y = g(x)$, 則由

$$\lim_{x\to c} g(x) = L$$

得

$$x \to c \Rightarrow y = g(x) \to L \tag{1}$$

以及 $f(x)$ 在 $x = L$ 連續, 得

$$\lim_{y\to L} f(y) = f(L) \tag{2}$$

接著, 代入 $y = g(x)$, 並根據 (1), (2) 式, 得

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = \lim_{y\to L} f(y) = f(L) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

<另證> 或由 ϵ-δ 的定義, 因為 $f(x)$ 在 $x = L$ 連續, 故對任意的 $\epsilon > 0$, 可得一對應的 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\text{當 } |x - L| < \delta_1 \text{ 時, } |f(x) - f(L)| < \epsilon \tag{3}$$

再由

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

針對前述的 $\delta_1 > 0$, 存在一對應的 $\delta_2 > 0$ 使得

$$\text{當 } 0 < |x - c| < \delta_2 \text{ 時, } |g(x) - L| < \delta_1 \tag{4}$$

因此, 由 (4) 式, 對任意的 $\epsilon > 0$, 選取這個 $\delta_2 > 0$ 可使得

$$\text{當 } 0 < |x - c| < \delta_2 \text{ 時, } |g(x) - L| < \delta_1$$

再由 (3) 式, 將上式中的 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 內, 得

$$|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$$

如圖示.

最後, 由極限的 ϵ-δ 定義,

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right)$$

得證.