單元 42: 切平面, 可微性與線性化
(課本 §10.4)

一. 切平面

複習: 設 $z=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微, 則過 (x_0,z_0), 的切線爲

$$z-z_0=f'(x_0)(x-x_0)\ (\text{點斜式})$$

其中 $z_0=f(x_0)$, 亦相當於

$$z=z_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

又 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的線性近似 (linearization, 線性化) 爲

$$L(x)=z_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

由此可導出, 當 x 靠近 x_0 時,

$$f(x)\approx L(x)$$

如圖示.

推廣: 如圖示, 設點 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 爲曲面 $z=f(x,y)$ 上的一點, 其中 $z_0=f(x_0,y_0)$. 令過點

P 的垂直平面 $x = x_0$ 與曲面 $z = f(x, y)$ 的交集爲曲線

$$C_1 : z = f(x_0, y)$$

則在曲線 C_1 上過點 P 的切線斜率爲

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

同理, 令過點 P 的垂直平面 $y = y_0$ 與曲面 $z = f(x, y)$ 的交集爲曲線

$$C_2 : z = f(x, y_0)$$

則在曲線 C_2 上過點 P 的切線斜率爲

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

此外, 有如下的事實.

事實: 若 $f(x, y)$ 的偏導函數均連續, 則曲線 C_1 與 C_2 在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切線所形成的平面, 會包含所有過點 P 的曲線的切線. 稱此平面爲曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面 (tangent plane) .

問. 切平面的方程式爲何?

答. 因爲過點 $P(x_0, y_0, z_0)$, 根據平面方程式, 切平面如下:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

其中 A, B 爲待決定的常數. 接著, 考慮曲線

$$C_1 : z = f(x_0, y)$$

在 yz 平面的投影, 如圖示, 則過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切線爲

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \\ x &= x_0 \end{aligned} \qquad (1)$$

又根據事實, 此切線在切平面上並與垂直平面 $x = x_0$ 相交, 故切線滿足

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A(x - x_0) + B(y - y_0) \\ x &= x_0 \end{aligned}$$

亦相當於滿足

$$\begin{aligned} z - z_0 &= B(y - y_0) \\ x &= x_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

因此, 比較 (1) 式與 (2) 式, 得

$$B = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

同理, 曲線

$$C_2 : z = f(x, y_0)$$

在 xz 平面的投影如圖示, 故過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切線爲

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) \\ y &= y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

又根據事實, 此切線在切平面上並與垂直平面 $y = y_0$ 相交, 故切線滿足

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A(x - x_0) + B(y - y_0) \\ y &= y_0 \end{aligned}$$

亦相當於滿足

$$\begin{aligned} z - z_0 &= A(x - x_0) \\ y &= y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

所以, 比較 (3) 式與 (4) 式, 得

$$A = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

因此, 若曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面存在, 則切平面的方程式爲

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

註. 一階偏導數

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

與

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

存在並不保證在點 (x_0, y_0, z_0) 的切平面存在, 反例如下述的例 2. 而需要更強的條件, 亦即, 可微性 (differentiability) 才能確定切平面的存在.

例 1. 已知

$$z = f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

在點 $(1, 2, 8)$ 的切平面存在. 試求此切平面.

<解> 根據切平面的方程式, 首先需要求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} &= \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,2)} \\ &= 8x\Big|_{(1,2)} = 8 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} &= \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,2)} \\ &= 2y\Big|_{(1,2)} = 4 \end{aligned}$$

又點 $(1,2,8)$ 在 $z=f(x,y)$ 上, 因爲將 $(1,2)$ 代入 $f(x,y)$, 得

$$8=4(1)^2+(2)^2$$

因此, 過點 $(1,2,8)$ 的切平面爲

$$z-8=8(x-1)+4(y-2)$$

亦相當於

$$8x+4y-z=8$$

二. 可微性

複習: 單變數函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微若且爲若

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在. 又函數 f 在 $x=x_0$ 的線性化 (linearization, 線性近似) 爲

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

如圖示. 由此導出

$$|f(x)-L(x)|=|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|$$

所以, 根據上式,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-L(x)}{x-x_0}\right| &(5)\\
&= \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \\
&= \left|\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \\
&= |f'(x_0)-f'(x_0)| = 0 &(6)
\end{aligned}
$$

若且爲若 f 在 $x=x_0$ 可微.

註 1. (5) 式中的分子 $|f(x)-L(x)|$ 表示線性近似的誤差, 而分母 $|x-x_0|$ 表示點 x 與 x_0 之間的距離.

註 2. (6) 式顯示出可由線性化 (linearization, 線性近似) 的角度看可微性, 亦即, 線性誤差與點距離的比值的極限. 由此角度, 可推廣至多變數函數的可微性, 如下述.

推廣:

定義. 設 $f(x,y)$ 的一階偏導函數

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

與

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

均定義在 (x_0, y_0) 的一個開圓碟內. 令

$$\begin{aligned} & L(x,y) \\ = \;& f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \\ & \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{aligned}$$

(稱作 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的線性化, linearization)
則 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微若且爲若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left| \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \right| = 0 \quad (7)$$

若 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 則平面

$$z = L(x,y)$$

亦即,

$$\begin{aligned} & z - f(x_0,y_0) \\ = \;& \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{aligned}$$

定義爲曲面 $z = f(x,y)$ 在點 (x_0, y_0, z_0) 的切平面 (tangent plane).

註 1. (7) 式中的分子為線性近似的誤差, 分母為點 (x, y) 與 (x_0, y_0) 的距離, 型式上與單變數函數可微性的定義一樣.

註 2. $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微 (或切平面存在) 若且為若 (7) 式成立; 僅有 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 並不保證可微 (或切平面存在).

定理. 若雙變數函數 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 則 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 就連續.

註. 此定理與單變數函數的情況相同.

例 2. 設

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{若 } xy \neq 0 \\ 1 & \text{若 } xy = 0 \end{cases}$$

如圖示. 試證

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} \text{ 與 } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$$

均存在, 但 f 在 $(0, 0)$ 不連續. 因此, 由上述定理, f 在 $(0, 0)$ 卻不可微.

<證> 根據偏導數的定義,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

存在. 又

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0\end{aligned}$$

也存在. 接著, 證明在 $(0,0)$ 不連續. 首先考慮曲線

$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

如圖示, 則

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} 1 = 1$$

此乃因爲在曲線 C_1 上, $xy = x(0) = 0$, 而得第一個等號成立. 又令曲線

$$C_2 : \begin{cases} y = x \\ x > 0 \end{cases}$$

如圖示, 則在曲線 C_2 上, $xy = x^2 \neq 0$, 可得

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} 0 = 0$$

因為得出 f 在兩個曲線上不一致的行為

$$1 \neq 0$$

所以,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

不存在. 故根據連續性的定義, 在 $(0,0)$ 的極限不存在時, 可導出 f 在 $(0,0)$ 不連續. 最後, 根據上述定理, 在 $(0,0)$ 不連續的情況下, 可得出 f 在 $(0,0)$ 不可微, 即使

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

均存在.

註. 以定義檢查 $f(x,y)$ 的可微性相當不方便, 但一個保證可微且方便的充分條件如下:

設 $f(x,y)$ 在一 (x_0,y_0) 的開圓碟有定義, 且一階偏導函數

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ 與 } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

均在此一 (x_0, y_0) 的開圓碟上連續. 則 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 亦相當於 f 在 (x_0, y_0) 上有切平面

$$\begin{aligned} z &= L(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) \\ &\qquad + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \end{aligned}$$

例 3. 試證

$$f(x, y) = 2x^2y - y^2$$

在所有的 $(x, y) \in R^2$ 都可微.

<證> 因爲

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4xy$$

對所有的 $(x, y) \in R^2$ 都連續, 且

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x^2 - 2y$$

也對所有的 $(x, y) \in R^2$ 都連續, 所以根據上述的充分條件, $f(x, y)$ 在整個 R^2 上是可微的.

三. 線性化

定義. 設 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微, 則 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的線性化 (linearziation)

$$\begin{aligned} & L(x,y) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \ f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+ \\ & \qquad\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{aligned}$$

且

$$f(x,y) \approx L(x,y)$$

稱作 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的線性近似或切平面近似 (linear or tangent plane approximation).

例 4. 試求

$$f(x,y)=x^2y+2xe^y$$

在 $(1,1)$ 的線性近似.

<解> 根據線性近似的定義, 需先求出兩個偏導函數

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy+2e^y$$

以及

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2+2xe^y$$

因此, $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 的線性化

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,1)+\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1)+ \\ &\qquad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1) \\ &= (1+2e)+(2+2e)(x-1)+ \\ &\qquad (1+2e)(y-1) \\ &= 1+2e-2-2e-1-2e+ \\ &\qquad (2+2e)x+(1+2e)y \\ &= -2-2e+(2+2e)x+(1+2e)y \end{aligned}$$

由此, 當 (x,y) 靠近 $(1,1)$ 時,

$$f(x,y)\approx L(x,y)$$

定義. 向量值函數 (vector-valued function)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: R^n &\to R^m \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) &\to \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中每一個

$$\begin{aligned} f_i: R^n &\to R \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) &\to f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

都是一實數值函數, $1 \leq i \leq m$.

註. 在第 11 章會經常用到向量值函數, 如 u, v 分別爲二物種的密度, $f(u,v)$, $g(u,v)$ 分別爲二物種的單位成長率 (per capita growth rate), 則

$$(u,v) \to \begin{bmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{bmatrix}$$

爲一由 R^2 到 R^2 的向量值函數.

問. 如何推廣向量值函數的線性化?

答. 複習: 情況 1. $f : R \to R$, 則 f 在 x_0 的線性化:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx f(x)$$

當 x 靠近 x_0 時, 如圖示. 舉例, 設

$$f(x) = 2\ln x$$

則 f 在 $x_0 = 1$ 的

$$\begin{aligned} L(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= 2\ln(1) + \frac{2}{1}(x-1) \\ &\quad (\text{因爲 } f'(x) = 2/x) \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} 2\ln(1.1) = f(1.1) &\approx L(1.1) \\ &= 2(1.1-1) = 0.2 \end{aligned}$$

情況 2. $f: R^2 \to R^1$, 則 f 在 (x_0, y_0) 的線性化:

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \\ &\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \\ &= f(x_0,y_0) + \\ &\quad \left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{(矩陣表示法)} \\ &\approx f(x,y) \end{aligned}$$

當 (x, y) 靠近 (x_0, y_0) 時, 如圖示. 舉例,

$$f(x,y) = \ln x + \ln y$$

在 $(1, 1)$ 的線性化

$$L(x,y) = f(1,1) + \left[\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}, \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

又

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} \text{ 且 } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

由此導出

$$\begin{aligned} L(x,y) &= (\ln 1+\ln 1)+[1,1]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \\ &= (x-1)+(y-1)=x+y-2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \ln(1.1)+\ln(0.9) &= f(1.1,0.9) \\ &\approx L(1.1,0.9) \\ &= (1.1-1)+(0.9-1) \\ &= 0.1-0.1=0 \end{aligned}$$

推廣: 令

$$\begin{aligned} \mathbf{h}: R^2 &\to R^2 \\ (x,y) &\to \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$f(x,y),\ g(x,y): R^2 \to R^1$$

則 $\mathbf{h}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的線性化的求法如下:

(i) 針對每一分量 $f(x,y)$ 與 $g(x,y)$ 求其對應的線性化 $\alpha(x,y)$ 與 $\beta(x,y)$:

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) \\ &\qquad +\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= g(x_0,y_0)+\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)\\ &\quad +\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\end{aligned}$$

(ii) 定義 $\mathbf{h}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的線性化如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(x,y) &\overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}\alpha(x,y)\\ \beta(x,y)\end{bmatrix} \text{ (向量值函數)}\\ &= \begin{bmatrix} f(x_0,y_0)\\ g(x_0,y_0)\end{bmatrix}+\\ &\quad \begin{bmatrix}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}\\ &= \mathbf{h}(x_0,y_0)+(D\mathbf{h})(x_0,y_0)\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}\\ &\approx \mathbf{h}(x,y)\end{aligned}$$

當 (x,y) 靠近 (x_0,y_0) 時.

註. 上述第二個等號中的矩陣

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\end{bmatrix}$$

稱作 Jacobi 矩陣或導函數矩陣 (derivative matrix) 並以 $(D\mathbf{h})(x_0,y_0)$ 表示.

例. 設向量值函數

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{bmatrix} ye^{-x} \\ \sin x+\cos y \end{bmatrix}$$

則 $\mathbf{f}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的線性化

$$\mathbf{L}(x,y)=\mathbf{f}(0,0)+(D\mathbf{f})(0,0)\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}$$

又, 根據 Jacobi 矩陣的定義,

$$\begin{aligned}(D\mathbf{f})(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(ye^{-x})}{\partial x} & \frac{\partial(ye^{-x})}{\partial y} \\ \frac{\partial(\sin x+\cos y)}{\partial x} & \frac{\partial(\sin x+\cos y)}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

所以, 實際將 $(0,0)$ 代入後, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(x,y) &= \begin{bmatrix} 0e^{-0} \\ \sin 0+\cos 0 \end{bmatrix}+ \\ &\quad \begin{bmatrix} -0e^{-0} & e^{-0} \\ \cos 0 & -\sin 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ x+1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -0.1e^{-0.1} \\ \sin(0.1)+\cos(-0.1) \end{bmatrix} &= f(0.1,-0.1) \\ &\approx L(0.1,-0.1) \\ &= \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

一個很容易得出的近似值. 實際上, 用計算器求得的值爲

$$\begin{bmatrix} -0.1e^{-0.1} \\ \sin(0.1)+\cos(-0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.09 \\ 1.09 \end{bmatrix}$$

與上述的估計值相當地一致. 故針對此例而言, 線性近似是相當準確並容易計算的.