單元 18: 極值, 反曲點與繪圖
(課本 §5.3)

一. 極值

定義. 設 c 在 f 的定義域內. 則 c 爲 f 的臨界點 (critical point) 若且爲若 $f'(c) = 0$ 或 $f'(c)$ 不存在 (未定義).

問. 如何找局部極值? 根據如下的二步驟:

(1) 收集所有的候選點 (candidates), 共有三類:

1. $f'(x) = 0$ 的點 x (第一類臨界點).
2. $f'(x)$ 不存在的點 x (第二類臨界點).
3. f 定義域內的端點, 亦即, 閉端點, 如 $[a, b)$ 中的 a.

(2) 利用下列二種檢定法來檢查 (1) 中的候選點.

(a) 一階導函數檢定法:

(i) f' 由 $(+)$ 到 $(-)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最大值 (local max).

(ii) f' 由 $(-)$ 到 $(+)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最小值 (loacl min).

(iii) f 由 $(+)$ 到 $(+)$ 或 $(-)$ 到 $(-)$ $\Rightarrow$ 在 $x = c$ 無極值.

(iv) 若 c 爲左端點時, 其右的 f' 爲 $(+)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最小值; 其右的 f' 爲 $(-)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最大值.

若 c 爲右端點時, 其左的 f' 爲 $(+)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最大值; 其左的 f' 爲 $(-)$ $\Rightarrow$ 在點 c 有局部最小值.

(b) 二階導函數檢定法 (只適用於第一類臨界點, 亦即, $f'(c) = 0$ 的點 c):

(i) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) < 0$, 則在點 c 有局部最大值, 如圖示.

(ii) 若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) > 0$, 則在點 c 有局部最小值, 如圖示.

註. 當 $f''(c)=0$ 時, 無法判斷. 必須回去用一階導函數檢定法. 如,

$$f(x)=x^3,\ g(x)=x^4,\ h(x)=-x^4$$

其一階導函數分別爲

$$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=4x^3,\ h'(x)=-4x^3$$

二階導函數分別爲

$$f''(x)=6x,\ g''(x)=12x^2,\ h''(x)=-12x^2$$

以及在 $x=0$ 的一階與二階導函數的值

$$f'(0)=f''(0)=0$$

$$g'(0)=g''(0)=0$$

$$h'(0)=h''(0)=0$$

均爲 0, 但由圖形得知三個函數在 $x=0$ 的行爲完全不一樣:

- f 在 $x=0$ 無極值.
- g 在 $x=0$ 有局部最小值.
- h 在 $x=0$ 有局部最大值.

亦即, 二階導函數檢定法無法判斷出它們之間的差異.

因此, 需要回到一階導函數檢定法:

- f' 由 $(+)$ 到 $(+)$, 如符號圖所示. 故, 在 $x = 0$ 無極值.

- g' 由 $(-)$ 到 $(+)$, 如符號圖所示. 故, 在 $x = 0$ 有局部最小值.

- h' 由 $(+)$ 到 $(-)$, 如符號圖所示. 故, 在 $x = 0$ 有局部最大值.

問. 如何找全面極值? 根據如下的三步驟:

(1) 找出局部極值.

(2) 求 f 定義域的開邊界 (open boundary) (亦即, 開端點, 如, $[a, b)$ 中之 b, 或 $(-\infty, b]$ 中之 $-\infty$) 的附近的行爲, 也就是極限值.

(3) 比較 (1) 與 (2) 中的值而挑出全面極值 (不一定存在).

例 1. 試求

$$f(x) = |x^2 - 4|,\ -3 \le x < 2.54$$

的局部極值與全面極值.

<解> 一. 局部極值

(1) 候選點:

1. 閉端點: $x = -3$

2. 臨界點: 首先

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & -3 \le x \le -2 \text{ 或 } \\ & 2 \le x < 2.5, \\ 4 - x^2, & -2 < x < 2. \end{cases}$$

故,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & -3 < x < -2 \text{ 或 } \\ & 2 < x < 2.5, \\ -2x, & -2 < x < 2. \end{cases}$$

如圖示.

第一類: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0$, 得 $x = 0$.

第二類: 因爲在銜接點 $x=-2$, 2 以外的 x, f' 都存在, 所以只需檢查二個銜接點.

先檢查 $x=2$. 根據導函數的定義, 需計算

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x^2-4)-0}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2^-}\frac{(4-x^2)-0}{x-2}\\
&=\lim_{x\to 2^-}-(x+2)=-4
\end{aligned}$$

因爲左極限 $\neq$ 右極限, 得 $f'(2)$ 不存在.

同理, 檢查 $x=-2$, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\\
&=\lim_{x\to -2^+}\frac{(4-x^2)-0}{x+2}\\
&=\lim_{x\to -2^+}(2-x)=4
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to -2^-} \frac{(x^2-4)-0}{x+2} \\
&= \lim_{x\to -2^-} (x-2) = -4
\end{aligned}$$

故, $f'(-2)$ 也不存在.

所以, 有兩個第二類臨界點: $x=-2$ 與 $x=2$.

因此, 共有四個候選點: $x=-3$ (閉端點), $x=-2$ (第二類臨界點), $x=0$ (第一類臨界點), 以及 $x=2$ (第二類臨界點).

(2) 一階導函數檢定法: 計算 f' 在各區間的符號如下,

$[-3,-2)$: $f'(-2.5)=(+)(-)=(-)$, 遞減

$(-2,0)$: $f'(-1)=(-)(-)=(+)$, 遞增

$(0,2)$: $f'(1)=(-)(+)=(-)$, 遞減

$(2, 2.5)$: $f'(2.2) = (+)(+) = (+)$, 遞增

並繪出 f' 的符號圖, 可判斷出

f 在 $x = -3$, 0 有局部最大值 5.

f 在 $x = -2$, 2 有局部最小值 0.

二. 全面極值

比較局部極值與在開端點的極限:

$f(-3) = |(-3)^2 - 4| = 5 \leftarrow$ 最大

$f(0) = 4$

$f(-2) = 0 \leftarrow$ 最小

$f(2) = 0 \leftarrow$ 最小

$\lim\limits_{x\to 2.5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2.5^-} (x^2-4) = 2.25$ (開邊界或開端點附近的行爲)

因此,

全面最小值爲 0, 發在 $x=-2$ 與 $x=2$.

全面最大值爲 5, 發生在 $x=-3$.

最後, 由圖形也可得出與上面求得的一致結果.

註. 若

$$f(x) = |x^2-4|,\ -3 \le x < 4$$

時, 局部極值爲何? 不變, 因爲候選點未變.

全面極值爲何? 爲何如此?

答. 沒有全面最大值, 因爲

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (x^2-4) = 12$, 最大

因而打敗了 $f(-3)=5$, 但 $x=4$ 卻不在 f 的定義域內. 因此, 在 $x=4$ 沒有全面最大值

全面最小值不受影響, 還是爲 0, 發生在

$$x=2 \quad \text{與} \quad -2$$

觀察圖形, 可更清楚地看出在開端點的極限對全面極值的影響.

例 2. 試求

$$f(x)=\frac{3}{2}x^4-2x^3-6x^2+2,\ x\in R$$

的局部極值與全面極值.

<解> 一. 局部極值

(1) 找候選點:

1. (閉) 端點: 無.

2. 臨界點:

第一類: 解 $f'(x) = 0$. 相當於解

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^3 - 6x^2 - 12x \\ &= 6x(x^2 - x - 2) \\ &= 6x(x-2)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

因此, 得三個第一類臨界點

$$x = -1,\ 0,\ 2$$

第二類: $f'(x)$ 未定義的 x. 無, 因爲 $f'(x)$ 爲一多項式, 對所有的 $x \in R$ 都有定義.

(2) 二階導函數檢定法 (因爲候選點均爲第一類臨界點, 故可使用) (或一階導函數檢定法, 請自行驗證. 應得出一致的結果.): 先求得

$$f''(x) = 18x^2 - 12x - 12$$

再將候選點代入 f'' 內, 並判斷之, 過程如下:

$f''(-1) = 18 + 12 - 12 > 0 \Rightarrow$ 在 $x = -1$ 有局部最小值.

$f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ 在 $x = 0$ 有局部最大值.

$f''(2) = 72 - 24 - 12 > 0 \Rightarrow$ 在 $x = 2$ 有局部最小值.

二. 全面極值

比較局部極值與在開端點的極限 (或稱作開邊界附近的行爲):

$f(-1) = \frac{3}{2} + 2 - 6 + 2 = -\frac{1}{2}$

$f(0) = 2$

$f(2) = 24 - 16 - 24 + 2 = -14 \leftarrow$ 最小

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{2}x^4 = \infty \leftarrow$ 最大 (但 ∞ 不在定義域內)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2}x^4 = \infty \leftarrow$ 最大 (但 $-\infty$ 不在定義域內)

因此, 只有全面最小值 -14, 發生在 $x=2$. 沒有全面最大值.

繪圖並觀察之, 可體會出與上述解析過程一致的結果.

二. 反曲點 (Inflection Points)

定義. 在函數 f 定義域內的點 c 處有一反曲點 $(c, f(c))$ 若且爲若自變數 x 通過點 c 時, f 的彎曲性改變, 亦相當於過點 c 時, f'' 變號, 如下圖中的四種情形.

註 1. 爲反曲點的必要條件: 若 f 爲二次可微且在 c 有一反曲點, 則 $f''(c)=0$ (因爲 f'' 由 "$+++$ 到 $---$" 或由 "$---$ 到 $+++$" 必要經過 $f''(c)=0$). 但當 $f''(c)=0$ 時, 並不保證在 c 有一反曲點.

非充分條件的反例: 考慮

$$f(x)=x^4$$

則

$$f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2=0$$

所以, 在 $x=0$ 時, $f''(0)=0$. 但在 $x=0$ 時, 不爲一反曲點, 因爲 f'' 的符號圖:

$(-\infty,0)$: $f''(-1)=12(-1)^2=(+)$, 上凹

$(0,\infty)$: $f''(1)=12(1)^2=(+)$, 上凹

顯示除了 $x=0$ 外, $f''(x)=12x^2$ 恆爲正, 沒變號, 圖形恆爲上凹, 彎曲性未改變.

事實上: 由 f' 的符號圖:

$(-\infty,0)$: $f'(-1)=4(-1)^3=(-)$

$(0,\infty)$: $f'(1)=4(1)^3=(+)$

可得 f 在 $x=0$ 有一全面最小值.

注意. 無法由二階導函數檢定法判斷在 $x=0$ 的極值, 因爲 $f''(0)=0$.

因此, 使得 $f''(x) = 0$ 的點 x 僅是產生反曲點的候選點 (candidates). 也就是說, 從這些候選點開始著手就可檢查出反曲點 (那些 f'' 變號之點). 另外一類反曲點的候選點爲 f'' 未定義的點.

註 2. 摘要整理:

- 局部極值的候選點: $f'(x) = 0$, $f'(x)$ 未定義的 x, 以及閉端點.

- 反曲點的候選點: $f''(x) = 0$ 以及 $f''(x)$ 未定義的 x.

例 3. 試求

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1,\ x \in R$$

的反曲點.

<解> (1) 找反曲點的候選點: f'' 等於 0 或未定義的點. 首先,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$$

令

$$f''(x) = 3x - 3 = 0$$

解之, 得唯一的候選點 $x = 1$

(2) 驗證: 繪出 f'' 的符號圖, 如下述.

$$(-\infty, 1):\ f''(0) = 3(0) - 3 = (-),\ \text{下凹}$$

$$(1, \infty):\ f''(3) = 3(3) - 3 = (+),\ \text{上凹}$$

得知, f'' 過 $x = 1$ 時, 變號. 因此, 在 $x = 1$ 有一反曲點 $(1, f(1)) = (1, 2)$.

三. 繪圖與漸近線 (Asymptotes)

首先收集繪圖的預備知識 (資訊):

(i) 一階導函數 $\Rightarrow$ 單調性, 以及局部極值, 全面極值.

(ii) 二階導函數 $\Rightarrow$ 彎曲性, 以及反曲點.

(iii) 函數未定義的點, 一階導函數未定義的點以及開端點 (含 $\pm\infty$) 附近的行爲 (以極限求得) $\Rightarrow$ 漸近線, 以及全面極值.

最後綜合 (i)-(iii) 得函數的圖形.

定義. (1) $y = b$ 是一水平漸近線 (horizontal asymptote, H.A.) 若且爲若

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

或

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

此乃描述 f 在正, 負無窮遠的行爲.

(2) $x = c$ 是一垂直漸近線 (vertical asymptote, V.A.) 若且爲若

$$\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

此乃描述 f 在 c 附近的行爲.

(3) $y = mx + b$ 是一斜漸近線 (oblique asymptote, O.A.) 若且爲若

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

或

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$

此乃描述 f 在正, 負無窮遠的行爲.

舉例, (1)

$$f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

因爲 f 在 $x=0$ 未定義, 故需考慮在 $x=0$ 附近的行爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

以及

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

所以, $x=0$ 爲唯一的垂直漸近線, V.A. 接著, 探討 f 在正, 負無窮遠的行爲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

以及

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

因此, $y=0$ 爲唯一的水平漸近線, H.A.

(2) 最簡單的斜漸近線, O.A., 存在於, 當

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

且 $\deg(p(x)) = \deg(q(x)) + 1$ 時, 即函數爲假分式且分子的次數比分母的次數多 1. 例如,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \ x \neq 2$$

首先透過長除法,

$$f(x) = (x + 2) + \frac{1}{x - 2}$$

由此得,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} [f(x) - (x + 2)] &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x - 2} \\ &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x + 2)] &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x - 2} \\ &= \frac{1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

因此, $y = x + 2$ 爲唯一的斜漸近線, O.A.

因爲 f 在 $x = 2$ 未定義, 故需觀察函數在此點附近的行

爲, 得

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{x-2}=\frac{4-3}{0^+}=\infty$$

以及

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

因此, $x=2$ 爲唯一的垂直漸近線, V.A. 最後, 根據所得的資訊, 圖形如下.

例 4. 試繪

$$f(x)=e^{-x^2/2},\ x\in R$$

的圖形.

<解> (1) 由一階導函數所提供的訊息:

$$f'(x)=e^{-x^2/2}(-x),\ x\in R$$

則

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

且 f' 的符號圖如下:

$$(-\infty,0):\ f'(-1)=(+)(+)=(+),\ \text{遞增}$$

$(0,\infty)$: $f'(1)=(+)(-)=(-)$, 遞減

所以, f 在 $x=0$ 有唯一的局部最大值, 也是全面最大值.

(2) 由二階導函數所獲得的資訊:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x^2/2}+e^{-x^2/2}(x^2) \\ &= e^{-x^2/2}(x^2-1) \\ &= e^{-x^2/2}(x-1)(x+1),\ x\in R \end{aligned}$$

故,

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1,\, 1$$

接著, 求 f'' 的符號圖:

$(-\infty,-1)$: $f''(-2)=(+)(-)(-)=(+)$, 上凹

$(-1,1)$: $f''(0)=(+)(-)(+)=(-)$, 下凹

$(1,\infty)$: $f''(2)=(+)(+)(+)$, 上凹

根據 f'' 的符號圖, 得知在 $x=-1$ 與 $x=1$ 各有一個反曲點.

(3) 因爲 f 與 f' 對所有的 $x \in R$ 都有定義, 所以只需檢查在正, 負無窮遠時 f 的行爲, 亦即, 不會有垂直漸近線:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2/2} = e^{-\infty} = 0$$

且

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2/2} = e^{-\infty} = 0$$

因此, $y=0$ 爲唯一的水平漸近線, H.A.

(4) 綜合前面三項所得的資訊, 先描出重要的點:

x	$y=e^{-x^2/2}$
0	1 全面最大值
-1	$e^{-1/2}<1$ 反曲點
1	$e^{-1/2}$ 反曲點

再標出所有的漸近線.

最後, 根據 f' 與 f'' 的符號圖, 將描出的重要點適當地連結成曲線.

例 5. 試求

$$f(x)=\frac{3}{2}x^4-2x^3-6x^2+2,\ x\in R$$

的局部極值, 全面極值並繪其圖.

<解> 有關 f 的極值, 已於例 2 中求過, 爲了方便繪圖, 再重新完整地處理所有的過程.

(1) 由一階導函數所獲得的訊息:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^3-6x^2-12x \\ &= 6x(x^2-x-2) \\ &= 6x(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

故,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1,\ 0,\ 2$$

製作 f' 的符號圖:

$(-\infty,-1)$: $f'=(-)(-)(-)=(-)$, 遞減

$(-1,0)$: $f'=(-)(-)(+)=(+)$, 遞增

$(0,2)$: $f'=(+)(-)(+)=(-)$, 遞減

$$(2,\infty):\ f'=(+)(+)(+)=(+),\ \text{遞增}$$

由此得, f 在 $x=-1, 2$ 有局部最小值且在 $x=0$ 有局部最大值.

(2) 由二階導函數所提供的資訊:

$$f''(x)=18x^2-12x-12=6(3x^2-2x-2)$$

則

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

因此, f'' 的符號圖如下 (因爲 f'' 爲一開口向上的拋物線):

$$\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right):\ f''=(-)(-)=(+),\ \text{遞增}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3},\frac{1+2\sqrt{7}}{3}\right):\ f''=(-)(+)=(-),\ \text{遞減}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3},\infty\right):\ f''=(+)(+)=(+),\ \text{遞增}$$

根據 f'' 的符號圖, f 在 $\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$ 各有一個反曲點.

(3) 因爲 f 與 f' 在所有的 $x \in R$ 都有定義 (亦即, 無垂直漸近線), 故僅需求 f 在正, 負無窮遠的極限 (試圖找出水平漸近線與斜漸近線):

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2}x^4 = \frac{3}{2}(\pm\infty)^4 = \infty$$

因此, 也沒有水平與斜漸近線. 同時, 也推導出無全面最大值.

(4) 綜合前面三項所得的資訊繪圖. 首先描出重要的點:

x	$y = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2$
-1	$\frac{3}{2}$+2-6+2=-1/2 局部最小值
0	2 局部最大值
2	24-16-24+2=-14 全面最小值
$\frac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -0.55$	≈ 0.66 反曲點
$\frac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1.22$	≈ -7.18 反曲點

再根據 f' 與 f'' 的符號圖, 將描出的重要點適當地連結成曲線.

例 6. 試求

$$f(x) = x(1-x)^{2/3},\ x \in R$$

的局部極值, 全面極值並繪其圖.

<解> (1) 由一階導函數所獲得的資訊:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{-1/3}(-1) \\ &= (1-x)^{-1/3} \cdot \left(1 - x - \frac{2}{3}x\right) \\ &= \frac{1-(5/3)x}{(1-x)^{1/3}} \end{aligned}$$

所以,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/5$$

且 f' 在 $x = 1$ 未定義. 得二個局部極值的候選點 $x = 3/5$ 與 1. 根據此二點製作 f' 的符號圖如下:

$(-\infty, 3/5)$: $f' = (+)/(+) = (+)$, 遞增

$(3/5, 1)$: $f' = (-)/(+) = (-)$, 遞減

$(1, \infty)$: $f' = (-)/(-) = (+)$, 遞增

因此, 由 f' 的符號圖, 可判斷出在 $x = 3/5$ 有局部極大值且在 $x = 1$ 有局部最小值.

(2) 獲得由二階導函數所提供的訊息:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{5}{3}(1-x)^{-1/3} + \left(1-\frac{5}{3}x\right)\cdot \\ &\qquad \left(-\frac{1}{3}\right)(1-x)^{-4/3}(-1) \\ &= (1-x)^{-4/3}\cdot \\ &\qquad \left(-\frac{5}{3}(1-x)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right) \\ &= (1-x)^{-4/3}\left(-\frac{4}{3}+\frac{10}{9}x\right) \end{aligned}$$

所以,

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=6/5$$

且 f'' 在 $x=1$ 未定義. 故得二個反曲點的候選點 $x=6/5$ 與 1. 接著, 根據此二點可得 f'' 的符號圖如下:

$(-\infty,1)$: $f''=(+)(-)=(-)$, 下凹

$(1,6/5)$: $f''=(+)(-)=(-)$, 下凹

$(6/5,\infty)$: $f''=(+)(+)=(+)$, 上凹

因此, 只有在通過 $x = 6/5$ 時, f'' 變號, 亦即, 只有一個反曲點, 發生在 $x = 6/5$.

(3) 因爲 f' 在 $x = 1$ 未定義, 故需檢查 f 在此點的極限:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1(1-1)^{2/3} = 0$$

所以, 在 $x = 0$ 沒有垂直漸近線. 另外, 需求出 f 在正, 負無窮遠的極限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x(1-x)^{2/3}\\ &= (-\infty)[1-(-\infty)]^{2/3}\\ &= (-\infty)(+\infty) = -\infty\end{aligned}$$

以及

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = (\infty)(1-\infty)^{2/3} = (\infty)(\infty) = \infty$$

因此, f 沒有全面極值.

(4) 綜合 (1)-(3) 項的資訊繪圖. 首先描出重要的點:

x	$y = x(1-x)^{2/3}$
$3/5$	$3/5 \cdot (2/5)^{2/3} \approx 0.33$ 局部最大值
1	0 局部最小值
$6/5$	$6/5 \cdot (-1/5)^{2/3} \approx 0.41$ 反曲點

然後, 根據 f' 與 f'' 的符號圖, 將描出的重要點適當地連結成曲線.

例 7. 試求

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1,\ x \in R$$

的局部極值, 全面極值並繪其圖.

<解> (1) 蒐集由一階導函數所提供的訊息:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 - 2 \\ &= 2(x-1)(x+1),\ x \in R \end{aligned}$$

故,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$$

根據此二局部極值的候選點, 製作 f' 的符號圖:

$(-\infty, -1)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增

$(-1, 1)$: $f' = (-)(+) = (-)$, 遞減

$(1, \infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增

因此, 由 f' 的符號圖可判斷出 f 在 $x=-1$ 有局部最大値且在 $x=1$ 有局部最小値.

(2) 由二階導函數所提供的資訊:

$$f''(x)=4x$$

所以,

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

根據此一反曲點的候選點, 製作 f'' 的符號圖:

$(-\infty,0)$: $f''=(-)$, 下凹

$(0,\infty)$: $f''=(+)$, 上凹

根據 f'' 的符號圖, 經過 $x=0$ 時, f'' 變號, 故在 $x=0$ 有一反曲點.

(3) 因爲 f 與 f' 在整個實數線上都有定義, 所以僅需檢查 f 在正, 負無窮遠的極限:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x^3=-\infty$$

以及

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}x^3 = \infty$$

因此, f 沒有全面極值.

(4) 綜合 (1)-(3) 項的資訊繪圖. 首先描出重要的點:

x	$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$
-1	$-\frac{2}{3} + 2 + 1 = \frac{7}{3}$ 局部最大值
0	1 反曲點
1	$\frac{2}{3} - 2 + 1 = -\frac{1}{3}$ 局部最小值

最後, 根據 f' 與 f'' 的符號圖, 將描出的重要點適當地連結成曲線.