單元 15: 線性近似與誤差衍生
(課本 §4.8)

例子. 設 N 爲氮肥量 (nitrogen level), Y 爲農作物產量 (crop yield), 且它們關係爲

$$Y(N) = Y_{\text{max}}\frac{N}{K+N}$$

其中 Y_{max} 爲最大產量，K 爲一正常數, 如圖示. 若 N_0 爲現在的氮肥量, 且做些許的改變 ΔN, 則對應的農產量改變了

$$\begin{aligned}\Delta Y &= Y(N_0+\Delta N)-Y(N_0)\\ &= \frac{Y(N_0+\Delta N)-Y(N_0)}{\Delta N}\cdot\Delta N \qquad (1)\\ &\approx Y'(N_0)\Delta N\end{aligned}$$

最後一式成立乃因爲

$$Y'(N_0) = \lim_{\Delta N\to 0}\frac{Y(N_0+\Delta N)-Y(N_0)}{\Delta N}$$

由此得, 量差商

$$\frac{Y(N_0+\Delta N)-Y(N_0)}{\Delta N}\approx Y'(N_0)$$

所以, 代入 (1) 式, 得

$$\Delta Y \approx Y'(N_0)\Delta N$$

以及

$$Y(N_0 + \Delta N) \approx Y(N_0) + Y'(N_0)\Delta N$$

並稱此種近似爲線性近似 (linear approximation) 或切線近似 (tangent line approximation).

定義. 設 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 可微, 則稱

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

爲 f 在 $x = a$ 的線性化 (linearization) 或線性近似或切線近似.

事實上,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

爲過點 $(a, f(a))$ 的切線. 此乃因爲由點斜式得切線爲

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

亦相當於

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

因此, 可以用此切線來近似在 a 附近的 $f(x)$, 亦即, 若 $|x - a|$ 夠小時,

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

如圖示.

例 1. 試求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=49$ 的線性近似並以此估計 $\sqrt{50}$.

<解> 根據線性近似的公式, 需先求得 $f(x)$ 的導函數

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

所以, f 在 $x=49$ 的線性近似

$$\begin{aligned} L(x) &= f(49)+f'(49)(x-49) \\ &= \sqrt{49}+\frac{1}{2\sqrt{49}}(x-49) \\ &= 7+\frac{x-49}{14} \end{aligned}$$

可用於估計在 $x=49$ 附近的 $f(x)$. 因此,

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= f(50)\ (\text{在 } 49 \text{ 附近的 } f \text{ 值}) \\ &\approx L(50)=7+\frac{50-49}{14} \\ &= 7+\frac{1}{14}=7.0714 \end{aligned}$$

註. 與計算器的結果: $\sqrt{50}=7.0711\cdots$ 相一致, 但卻可在不用計算器的情形下, 很容易地求出.

例 2. 試求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的線性近似.

<解> 首先,

$$f'(x) = e^x$$

所以, e^x 在 $x = 0$ 的線性近似

$$\begin{aligned} L(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\ &= e^0 + e^0(x) \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

因此, 在 0 附近的

$$e^x \approx L(x) = 1 + x$$

如,

$$e^{0.01} \approx L(0.01) = 1 + 0.01 = 1.01$$

$$e^{-0.01} \approx L(-0.01) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$e^{0.001} \approx L(0.001) = 1 + 0.001 = 1.001$$

$$\vdots$$

例 3. 令 $N(t)$ 為 t 時的族群大小. 設單位成長率 (per capita growth rate) 為 2%. 已知

$N(10) = 250$, 試以線性近似估計在 $t = 10.2$ 的族群大小.

<解> 因爲 10.2 接近 10, 所以, 可考慮在 $t = 10$ 的線性近似

$$L(t) = N(10) + N'(10)(t - 10)$$

並以此估計在 $t = 10.2$ 的族群大小. 已知 $N(10) = 250$, 根據上式, 還需要知道 $N'(10)$ 爲何. 因爲單位成長率爲 2%, 由其定義此乃相當於

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = 0.02$$

由此推導出

$$N'(t) = 0.02N(t)$$

所以,

$$\begin{aligned} N'(10) &= (0.02)N(10) \\ &= (0.02)(250) \\ &= 5 \end{aligned}$$

因此, 線性近似

$$\begin{aligned} L(t) &= N(10) + N'(10)(t - 10) \\ &= 250 + 5(t - 10) \end{aligned}$$

最後, 欲估計的族群大小

$$\begin{aligned} N(10.2) &\approx L(10.2) \\ &= 250 + 5(10.2 - 10) \\ &= 251 \end{aligned}$$

誤差衍生 (Error propagation)

球狀細胞 (spherical cell) 的表面積 (suface area)

$$S = 4\pi r^2$$

其中 r 爲細胞的半徑. 所以,

$$\text{求 } S \Leftrightarrow \text{ 度量 } r$$

假設

$$r \text{ 的準確度 } = 2\%$$

此乃相當於令

$$r: \text{ 度量半徑 (measured radius)}$$

且

$$r_0: \text{ 眞正半徑 (true radius)}$$

則絕對誤差 (absolute error; 或容忍度, tolerence)

$$|\Delta r| \overset{\text{def}}{=} |r - r_0|$$

且

$$100\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right| = 2$$

註. $\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right|$ 稱作相對誤差 (relative error); $100\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right|$ 稱作百分誤差 (percentage error), 又稱作準確度.

例如, $r_0 = 3$ 毫米, 則

$$|\Delta r| = 3\,\text{毫米}\left(\frac{2}{100}\right) = 0.06\,\text{毫米}$$

且度量半徑

$$r = 3 \pm 0.06 = 2.94 \text{ 或 } 3.06\,\text{毫米}$$

問. 在半徑的準確度爲 2% 下, 表面積的準確度爲何? 亦即, $100\left|\frac{\Delta S}{S}\right|$ 爲何? 此處

$$\begin{aligned}\Delta S &\overset{\text{def}}{=} S(r) - S(r_0)\\ &= S(r_0 + \Delta r) - S(r_0)\end{aligned}$$

且 $S = S(r_0)$.

註. ΔS 稱作衍生誤差 (propagated error).

<解> 首先, 由線性近似, 得

$$\Delta S \approx S'(r_0)\Delta r$$

又

$$S'(r) = 8\pi r$$

且已知半徑 r 的百分誤差

$$100\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right| = 2$$

故將表面積的百分誤差表成 r 的百分誤差. 得表面積的百分誤差

$$\begin{aligned}
100\left|\frac{\Delta S}{S(r_0)}\right| &\approx 100\left|\frac{S'(r_0)\Delta r}{S(r_0)}\right| \\
&= 100\left|\frac{\Delta r}{r_0}\right|\left|\frac{S'(r_0)r_0}{S(r_0)}\right| \\
&= 2\frac{8\pi r_0^2}{4\pi r_0^2} = 4
\end{aligned}$$

亦即, 表面積的準確度為 4%, 相當於半徑的準確度的 2 倍.

例 4. 設 $f(x) = cx^r$. 試問 x 的準確度 (百分誤差, percentage error) 與 $f(x)$ 的準確度間之關係為何?

<解> 設 x 的誤差為 Δx, 則由線性近似, 得對應的 f 的誤差

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &\approx f'(x)\Delta x \end{aligned}$$

接著, $f'(x) = crx^{r-1}$, 故將 f 的準確度表成 x 的準確度, 得 f 的準確度

$$\begin{aligned} 100\left|\frac{\Delta f}{f}\right| &\approx 100\left|\frac{f'(x)\Delta x}{f}\right| \\ &= 100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| \\ &= 100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\left|\frac{crx^r}{cx^r}\right| \\ &= |r|\left(100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\right) \end{aligned}$$

也就是說, f 的準確度 (percentage error) $\approx x$ 的準確度 (percentage error) 的 $|r|$ 倍.

例 5. 根據資料 (數據) 繪圖得關係式:

$$[\text{樹葉面積}] \propto [\text{樹幹直徑}]^{1.84}$$

所以, 度量樹幹直徑可導出對總樹葉面積的估計.

問. 度量樹幹直徑時要多精確以致於估計樹葉面積時, 誤差在 10% 內?

<解1> 設

$$A = \text{樹葉面積}$$

且

$$d = \text{樹幹直徑}$$

則

$$A(d) = cd^{1.84}$$

又原問題相當於求

$$100\frac{|\Delta d|}{d}$$

以致於

$$100\frac{|\Delta A|}{A} = 10$$

接著, 根據線性近似, 並表成直徑 d 的百分誤差, 得

$$\begin{aligned} 100\frac{|\Delta A|}{A} &\approx (100)\left|\frac{A'(d)\Delta d}{A}\right| \\ &= 100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\left|\frac{c(1.84)d^{0.84-1}d}{cd^{1.84}}\right| \\ &= 1.84\left(100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\right) \end{aligned}$$

所以,

$$100\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \approx \frac{1}{1.84}\left(100\left|\frac{\Delta A}{A}\right|\right) = \frac{10}{1.84} = 5.4$$

因此, 樹幹直徑的誤差必需在 5.4% 內, 才能保證估計樹葉面積時, 誤差在 10% 內.

<解2> 由例 4, 當 $A(d) = cd^{1.84}$ 時, $|r| = 1.84$ 且

$$100\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \approx |r|\left(100\left|\frac{\Delta d}{d}\right|\right)$$

所以,

$$100\left|\frac{\Delta d}{d}\right| \approx \frac{1}{|r|}\left(100\left|\frac{\Delta A}{A}\right|\right) = \frac{10}{1.84} = 5.4$$

例 6. 設 $f(x) = \ln x$. 試求當 x 爲 10 且度量的百分誤差爲 2% 時, $f(x)$ 的百分誤差.

<解> 由定義, 線性近似 $\Delta f \approx f'(x)\Delta x$, 並將 $f(x)$ 的百分誤差表成已知的 x 的百分誤差 $100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$, 得

$$\begin{aligned} 100\left|\frac{\Delta f}{f}\right| &\approx 100\left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right| \\ &= 100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \end{aligned}$$

又 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 故代入真實值 $x = 10$ 以及已知的百分誤差 $100\left|\frac{\Delta x}{x}\right| = 2$, 得

$$\begin{aligned} 100\left|\frac{\Delta f}{f}\right| &\approx 100\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\Big|_{x=10} \\ &= 2\frac{(10)(1/10)}{\ln 10} \\ &= \frac{2}{\ln 10} \approx 0.869 \end{aligned}$$

即 $f(x) = \ln x$ 的百分誤差近似於 0.9%.