單元 7: 函數與數學模型
(課本 §2.3)

一. 數學建模的四步驟

1. 公式化 (Formulate, 系統陳述化): 將眞實世界的問題有系統地用數學式子 (語言) 陳述成數學模型. 建模技巧涵蓋純理論的考量至相關資料的分析與解釋. 在微積分的範圍內, 主要考量一應變數如何依據一個或多個自變數而變化的關係, 故常以單變數或多變數或方程式的型式呈現.

2. 求解 (Solve): 利用適當的數學工具求解.

3. 解釋 (Interpret): 在原始眞實世界問題的背景下, 解釋步驟 2 所求得的數學模型的解.

4. 檢測 (Test): 經由觀察模型對眞實世界問題描述並對過去及 (或) 未來行爲變化預測的好壞程度來檢測模型的精準度. 若不滿意, 則需再思建模時的假設條件或回到步驟 1, 重新公式化.

如圖示.

二. 常用的建模函數

1. 多項式 (polynomial function)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中 n 爲非負整數, 稱作次數 (degree) 且實數 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 稱作係數 (coefficient).

當 n 爲 1 時, 一次多項式

$$f(x) = a_1 x + a_0 \quad (a_1 \neq 0)$$

又稱作線性函數.

2. 有理函數 (rational function)

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\ q(x) \neq 0$$

其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 爲二多項式, 即有理函數爲二多項式的商, 如

$$G(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1},\ x \neq -1, 1$$

與

$$F(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x + 1}{x - 2},\ x \neq 2$$

均爲有理函數.

3. 冪函數 (power function)

$$f(x) = x^r$$

其中 r 爲任一實數, 如

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2},\ x \geq 0$$

與

$$g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2},\ x \neq 0$$

均爲冪函數.

4. 四則與合成運算組合的函數, 如

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}},\ -1 \leq x \leq 1$$

與

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4},\ x \in R$$

以及

$$h(x) = (1+2x)^{1/2} + \frac{1}{(x^2+2)^{3/2}},\ x \geq -\frac{1}{2}$$

註. 例 1-例 4 的模型均為根據所得的資料並運用資料分析所發展出的工具而得到, 其中一種資料分析的概念為最小平方誤差法, 將會在 §8.4 中學習. 請自行閱讀這部分的例題.

三. 某些經濟模型

1. 需求函數 (demand function): $p = f(x)$, 描述單價 p 與銷售量 (市場需求量) x 的關係, 為 x 的遞減函數.

2. 供給函數 (supply function): $p = f(x)$, 描述單價 p 與 (廠商) 供應量 x 的關係, 為 x 的遞增函數.

3. 當生產 (供給) 量等於需求量時, 稱作市場平衡 (market equilibrium, 供需平衡); 在市場平衡時

的生產量 (需求量) 稱作平衡量 (equilibrium quantity) 且對應的單價稱作平衡價 (equilibrium price), 如圖示.

例 5. 設某產品的需求函數為

$$p = d(x) = -0.025x^2 - 0.5x + 60$$

且供給函數為

$$p = s(x) = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

其中 x 的單位為千件, p 的單位為元. 試求平衡量與平衡價.

<解> 根據定義, 需求 $d(x)$ 與 $s(x)$ 的交點, 得

$$-0.025x^2 - 0.5x + 60 = 0.02x^2 + 0.6x + 20$$

即

$$0.045x^2 + 1.1x - 40 = 0$$

同乘 1000, 得

$$45x^2 + 1100x - 40,000 = 0$$

同除 5, 得

$$9x^2 + 220x - 8,000 = 0$$

分解, 得

$$(9x+400)(x-20)=0$$

故 $x=20$ 或 $x=-\frac{400}{9}$ (不合) 且

$$\begin{aligned} p &= -0.0025(20)^2-0.5(20)+60 \\ &= -10-10+60=40 \end{aligned}$$

即平衡量爲 20,000 件且平衡價爲 \$40.

四. 數學建模 (mathematical modeling)

以例示範如何使用幾何或代數的論據建構數學模型 (constructing mathematical models).

基本準則爲

1. 以不同的字母表示問題中的相關變量 (variables, 變數). 可以的話, 以圖形輔助.

2. 將欲求的量表成數學式.

3. 根據問題給定的條件, 將欲求的量表成單變數的函數 f, 並根據實務情境限制出 f 的定義域.

例 6. 今以 3,000 呎的柵欄沿著一筆直的河邊 (作爲一天然界線) 圍出一長方形的放牧區域. 令 x 爲此區域的寬 (與河邊垂直的界線長度), 試將此區域的面積表成 x 的函數 f.

<解> 已知寬爲 x, 設長爲 y, 如圖示, 得面積

$$A = xy$$

由條件, 得

$$2x + y = 3000$$

解 y 並代入, 得

$$y = 3000 - 2x$$

以及面積

$$\begin{aligned} A &= x(3000-2x),\ x \geq 0,\ 3000-2x \geq 0 \\ &= 3000x - 2x^2,\ 0 \leq x \leq 1500 \end{aligned}$$

例 7. 設某旅遊公司的包機定價爲, 若 200 人報名, 每人費用 \$300; 每多 1 人, 費用降 \$1. 試求此公司的收益函數.

<解> 設 x 爲超出 200 的人數, 則參加人數爲

$$200 + x,\ x \geq 0$$

且由題意, 每人費用爲

$$300 - x \ (\geq 0)$$

因此, 收益

$$\begin{aligned} R(x) &= (200 + x)(300 - x), \\ &\qquad\qquad x \geq 0,\ 300 - x \geq 0 \\ &= -x^2 + 100x + 60,000,\ 0 \leq x \leq 300 \end{aligned}$$