單元 63: 三角函數的微分
(課本 §12.3)

首先探討兩個極限公式,

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$

為何成立? 由圖示, 當 x 靠近 0 時,

$$x \approx \sin x$$

故比值的極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

得證.

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$

為何成立? 將分子, 分母同乘

$$\cos h+1$$

並根據平方差公式

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

及三角恆等式

$$\sin^2 h + \cos^2 h = 1$$

化簡且根據第一個極限公式, 得

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\
&= -\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{\cos h + 1}\right) \\
&= (-1)(1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0
\end{aligned}$$

得證.

接著, 由導函數的定義及上述兩個極限公式, 得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h} \\
&= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x
\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

所致.

又由連鎖規則, 若 f 可微, 得

$$\frac{d}{dx}[\sin f(x)]=[\cos f(x)]f'(x)$$

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x)=x^2\sin x$

(b) $g(x)=\sin(2x+1)$

(c) $h(x)=(x+\sin x^2)^{10}$

<解> (a) 根據正弦函數的微分公式及乘法規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin x+x^2\cos x \\ &= x(2\sin x+x\cos x) \end{aligned}$$

(b) 根據正弦函數的微分公式及連鎖規則,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(2x+1)\cdot(2x+1)' \\ &= 2\cos(2x+1) \end{aligned}$$

(c) 根據連鎖規則及正弦函數的微分公式,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 10(x+\sin x^2)^9(1+\cos x^2\cdot(2x)) \\ &= 10(x+\sin x^2)^9(1+2x\cos x^2) \end{aligned}$$

此外, 由正弦與餘弦函數的關係式

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad 與 \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

以及正弦函數的微分公式與連鎖規則, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos x) &= \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' \\ &= (\sin x)(-1) = -\sin x \end{aligned}$$

並由連鎖規則, 若 f 爲可微, 得

$$\frac{d}{dx}[\cos f(x)] = -[\sin f(x)]f'(x)$$

例 2. 試微分下列各函數.

(a) $f(x) = \cos(2x^2 - 1)$

(b) $g(x) = \sqrt{\cos 2x}$

(c) $h(x) = e^{\sin 2x + \cos 3x}$

<解> (a) 根據餘弦函數的微分公式及連鎖規則，

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(2x^2-1)\cdot(2x^2-1)' \\ &= -4x\sin(2x^2-1) \end{aligned}$$

(b) 根據連鎖規則及餘弦函數的微分公式，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(\cos 2x)^{-1/2}(-\sin 2x)(2) \\ &= -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} \end{aligned}$$

(c) 根據連鎖規則以及指數函數，正弦函數，餘弦函數的微分公式，

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sin 2x+\cos 3x}[\cos 2x(2) - \sin 3x(3)] \\ &= (2\cos 2x - 3\sin 3x)e^{\sin 2x+\cos 3x} \end{aligned}$$

最後, 根據除法規則或連鎖規則可推導另外四個三角函數的導函數.

1. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

2. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

3. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

4. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

<證> 1. 根據除法規則以及正弦函數, 餘弦函數的微分公式,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}
$$

2．根據除法規則以及正弦函數，餘弦函數的微分公式，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \\
&= \frac{(-\sin x)(\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
&= -\csc^2 x
\end{aligned}$$

3．根據連鎖規則以及餘弦函數的微分公式，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \frac{d}{dx}[(\cos x)^{-1}] \\
&= -(\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}$$

4．根據連鎖規則以及正弦函數的微分公式，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\csc x) &= \frac{d}{dx}[(\sin x)^{-1}] \\
&= -(\sin x)^{-2} \cdot \cos x \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= -\csc x \cot x
\end{aligned}$$

再根據連鎖規則, 若 f 可微, 則

1'. $\dfrac{d}{dx}[\tan f(x)] = [\sec^2 f(x)]f'(x)$

2'. $\dfrac{d}{dx}[\cot f(x)] = -[\csc^2 f(x)]f'(x)$

3'. $\dfrac{d}{dx}[\sec f(x)] = [\sec f(x)\tan f(x)]f'(x)$

4'. $\dfrac{d}{dx}[\csc f(x)] = -[\csc f(x)\cot f(x)]f'(x)$

例 3. 試求函數 $f(x) = \tan 2x$ 的圖形上過點 $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ 的切線方程式.

<解> 首先, 根據正切函數的微分公式與連鎖規則,

$$f'(x) = \sec^2(2x)(2) = 2\sec^2(2x)$$

得斜率

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{2})^2 = 4$$

因此, 切線爲

$$y - 1 = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

即

$$y = 4x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

例 4. 設在 t 月, 貓頭鷹 (predator, 掠食者) 的數量爲

$$P_1(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

且老鼠 (prey, 獵物) 的數量爲

$$P_2(t) = 20,000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

試求 $t = 2$ 的各族群變化率.

<解> 首先, 根據正弦函數, 餘弦函數的微分公式及連鎖規則,

$$P_1'(t) = 100\left[\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{25\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

且

$$\begin{aligned} P_2'(t) &= 4000\left[-\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\frac{1000\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \end{aligned}$$

代 $t=2$, 得

$$P_1'(2)=\frac{25\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{25\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 22.7$$

即在 2 月時, 每月約增 22.7 隻, 以及

$$\begin{aligned} P_2'(2) &= -\frac{1000\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1000\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\approx -523.6 \end{aligned}$$

即在 2 月時, 每月約少 523.6 隻.

例 5. 試繪

$$f(x)=\sin^2 x,\ \ 0\le x\le\pi$$

的圖形.

<解> (a) 根據連鎖規則與正弦函數的微分公式, 由

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x=0$$

得

$$2x=0,\ \pi,\ 2\pi$$

即臨界數 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 與 $x=\pi$. 接著, 求 f' 在各子區間的符號, 得

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $f'=(+)$, 遞增

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$：$f' = (-)$，遞減

如圖示．因此，f 在 子區間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上遞增且在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上遞減．

(b) 由圖知，得絕對最大值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

又

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = \sin^2 \pi = 0$$

得絕對最小值 0．

(c) 根據連鎖規則與正弦函數的微分公式，由二次導函數

$$f''(x) = 2\cos 2x = 0$$

得

$$2x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}$$

即反曲後選數 $x = \frac{\pi}{4}$ 與 $x = \frac{3\pi}{4}$．接著，求 f'' 在各子區間的符號，得

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$：$f'' = (+)$，上凹

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$: $f'' = (-)$, 下凹

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$: $f'' = (+)$: 上凹

如圖示. 因此, f 在子區間 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 與 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 上凹且在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 下凹並得二反曲點

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ 與 } \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

(d) 描點與連結. 標示絕對極值與反曲點並將 f' 與 f'' 的符號圖分別置於 x-軸的上, 下方且由左至右, 在每個子區間上, 根據單調性及凹性以平滑曲線連結, 得

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增, 上凹

$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增, 下凹

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減, 下凹

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減, 上凹

如圖示.

例 6. 設某餐廳由 6 月開始的第 t 週的收益爲

$$R(t)=2\left(5-4\cos\frac{\pi}{6}t\right),\ 0\leq t\leq 12$$

試問何時收益增加最快?

<解> 收益增加率爲

$$R'(t)=-8\left(-\sin\frac{\pi}{6}t\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{6}$$

由題意, 需最大化 $R'(t)$. 由

$$R''(t)=\frac{4\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi t}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{6}=0$$

得

$$\frac{\pi t}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

即 $R'(t)$ 的臨界數爲 $t=3$ 與 $t=9$. 又 $R'(t)$ 在 $[0,12]$ 上連續, 故絕對極值發生在臨界數或端點上, 經由計算, 得

$$R'(0)=0,\quad R'(3)=\frac{4\pi}{3}$$

$$R'(9)=-\frac{4\pi}{3},\quad R'(12)=0$$

比較, 得 $R'(t)$ 的最大值爲 $\frac{4\pi}{3}$ 且發生在 6 月開始的第 3 週.

例 7. 今製造一橫截面爲下底是 1 呎的梯形且側面爲 6 呎長, 1 呎寬的矩形馬槽 (trough), 如圖示. 試求最大容量的仰角 θ.

<解> 因爲

$$\text{體積} = \text{橫截面積} \times 6$$

故最大化體積等價於最大化橫截面積

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2}[1 + (1 + 2\cos\theta)]\sin\theta \\ &= (1+\cos\theta)\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

其中第一個等號乃根據圖示, 1 爲下底, $1 + 2\cos\theta$ 爲上底以及梯形面積公式所致. 由

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + \cos\theta + \cos^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \\ &= (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0 \end{aligned}$$

得

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos\theta = -1$$

即臨界數 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 或 $\theta = \pi$ (不合, 因爲大於 $\frac{\pi}{2}$). 又計算 $A'(\theta)$ 在各子區間的符號, 得

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$: $A'(\theta) = (+)(+) = (+)$, 遞增

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$: $A'(\theta) = (-)(+) = (-)$, 遞減

如圖示. 故當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時, 體積最大. 或計算 A 在臨界數與端點的值, 得

$$A(0) = (1+1)(0) = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1+0)(1) = 1$$

經由比較, 當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時有最大橫截面積, 即體積最大.

Exercises

8. 給定

$$f(x) = \cot\sqrt{x}$$

根據連鎖規則及餘切函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\csc^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\csc^2\sqrt{x} \end{aligned}$$

19. 給定函數

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}$$

根據乘法規則，連鎖規則及餘弦函數的微分公式，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\frac{1}{x} + x\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \end{aligned}$$

21. 給定函數

$$f(x) = \frac{x-\sin x}{1+\cos x}$$

根據除法規則及正弦，餘弦函數的微分公式，得導函數的分子爲

$$\begin{aligned} &(1-\cos x)(1+\cos x) \\ &\qquad -(x-\sin x)(-\sin x) \\ &= 1-\cos^2 x + x\sin x - \sin^2 x = x\sin x \end{aligned}$$

故

$$f'(x) = \frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

15. 給定

$$f(x) = \sin\sqrt{x^2-1}$$

根據連鎖規則及正弦函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\sqrt{x^2-1}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \frac{x\cos\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

17. 給定函數

$$f(x) = e^x \csc x$$

根據乘法規則及指數與餘割函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \csc x + e^x(-\csc x \cot x) \\ &= e^x \csc x(1-\cot x) \end{aligned}$$

48. 試求當距離爲 13,000 呎, 且以 480 呎/秒 增加時, ϕ 的變化速度.

<解> 求 z 與 ϕ 的關係式, 得

$$\frac{12,000}{z} = \cos\phi$$

其中 z 與 ϕ 均隨時間 t 而變. 故以連鎖規則對 t 微分, 得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{12,000}{z}\right) = \frac{d}{dt}\cos\phi$$

即
$$\frac{-12,000}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\sin\phi\frac{d\phi}{dt}$$
得
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{12,000}{z^2\sin\phi}\frac{dz}{dt}$$

由題意，代 $z = 13,0000$，$\frac{dz}{dt} = 480$ 以及對應的
$$\begin{aligned}\sin\phi &= \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{(13000)^2-(12000)^2}}{13000}\\ &= \frac{5000}{13000} = \frac{5}{13}\end{aligned}$$
得
$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{12000}{(13000)^2\left(\frac{5}{13}\right)}(480)\\ &= \frac{12(480)}{(13000)(5)} = \frac{(12)(96)}{13000} = \frac{144}{1625}\end{aligned}$$

57. T，因爲
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= 1\cdot\frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

58. T, 因爲

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0, \ -\infty < x < \infty$$

故 f 非遞減.

59. F, 反例, $f(x) = \cos x$ 在 $x = \pi$ 有相對極小値

$$f(\pi) = \cos \pi = -1$$

但 $g(x) = \sin x$ 在 $x = \pi$ 爲

$$g(\pi) = \sin \pi = 0$$

不是相對極大値.

60. T, 由

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

得

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

以及

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x - \cos x \\ &= -(\sin x + \cos x) < 0, \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故 f 在區間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 下凹.

51.

52.