單元 55: 常態分布
(課本 §10.3)

常態分布是所有機率分布中相當重要的, 並是許多抽樣問題中, 相關隨機變數分布的準確近似.

定義. 連續隨機變數

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

即期望值爲 μ 且標準差爲 σ 的常態隨機變數, 若且唯若 X 的機率密度函數

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

圖形爲鈴鐺型 (bell shaped, mound shape, 投手板型, 土丘型), 稱作常態曲線 (normal curve), 且經驗法則爲

$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0.6827$$

即有 68.27% 的 X 值是在期望值 μ 的一個標準差內;

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

即有 95.45% 的 X 值是在期望值的二個標準差內;

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

即有 99.73% 的 X 值是在期望值的三個標準差內, 如圖示.

註 1. 隨機變數

$$Z \sim N(0, 1)$$

即期望值 $\mu = 0$ 且標準差 $\sigma = 1$ 的常態隨機變數, 稱作標準常態隨機變數 (standard normal random variable), 如圖示.

註 2. 附錄 C 提供 $P(Z < z)$ 或 $P(Z \leq z)$ 的值, 即 Z 落在 $(-\infty, z)$ 或 $(-\infty, z]$ 內的機率, 供查用, 如圖示.

例 1. 設 $Z \sim N(0, 1)$. 試求

(a) $P(Z < 1.24)$

(b) $P(Z > 0.5)$

(c) $P(0.24 < Z < 1.48)$

(d) $P(-1.65 < Z < 2.02)$

<解> (a) 如圖示, 查表, 得

$$P(Z < 1.24) = 0.8925$$

(b) 如圖示, 根據對稱並查表, 得

$$P(Z > 0.5) = P(Z < -0.5) = 0.3085$$

或

$$\begin{aligned} P(Z > 0.5) &= 1 - P(Z \leq 0.5) \\ &= 1 - 0.6915 = 0.3085 \end{aligned}$$

(C) 如圖示, 查表, 得

$$\begin{aligned} &P(0.24 < Z < 1.48) \\ &= P(Z < 1.48) - P(Z \leq 0.24) \\ &= 0.9306 - 0.5948 = 0.3358 \end{aligned}$$

(d) 如圖示, 查表, 得

$$\begin{aligned} &P(-1.65 < Z < 2.02) \\ &= P(Z < 2.02) - P(Z < -1.65) \\ &= 0.9783 - 0.0495 = 0.9288 \end{aligned}$$

例 2. 設 $Z \sim N(0,1)$. 試求分別滿足

(a) $P(Z < z) = 0.9474$

(b) $P(Z > z) = 0.9115$

(c) $P(-z < Z < z) = 0.7888$

的 z 值.

<解> (a) 由圖示及查表, 得

$$P(Z < 1.62) = 0.9474$$

故 $z = 1.62$

(b) 由圖示及餘集的機率公式, 得

$$P(Z \le z) = 1 - 0.9115 = 0.0885$$

查表, 得

$$P(Z \le -1.35) = 0.0885$$

故 $z = -1.35$.

或由圖示及對稱性,

$$P(Z < -z) = 0.9115$$

查表, 得

$$P(Z < 1.35) = 0.9115$$

故 $-z = 1.35$, 即 $z = -1.35$.

(c) 由圖示, 得

$$P(Z < -z) = \frac{1 - 0.7888}{2} = 0.1056$$

查表, 得

$$P(Z < -1.25) = 0.1056$$

故 $-z = -1.25$, 即 $z = 1.25$.

或由圖示,

$$\begin{aligned} P(Z < z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(-z < Z < z) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 0.7888) = 0.8944 \end{aligned}$$

查表, 得

$$P(Z < 1.25) = 0.8944$$

故 $z = 1.25$.

轉換公式. 設 $X \sim N(\mu, \sigma)$, 則

$$Z \overset{\text{def}}{=} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

故

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

而可查表求值, 如圖示.

同理,

$$P(X < b) = P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

且

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

而可查表求值, 如圖示.

例 3. $X \sim N(100, 20)$, 則 (a) 由轉換公式並查表,

$$\begin{aligned} P(X < 120) &= P\left(Z < \frac{120-100}{20}\right) \\ &= P(Z < 1) = 0.8413 \end{aligned}$$

(b) 由轉換公式, 圖示 以及對稱性並查表,

$$\begin{aligned} P(X > 70) &= P\left(Z > \frac{70-100}{20}\right) \\ &= P(Z > -1.5) = P(Z < 1.5) \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

或根據轉換公式及餘集的機率公式並查表,

$$\begin{aligned} P(X > 70) &= P(Z > -1.5) \\ &= 1 - P(Z \leq -1.5) \\ &= 1 - 0.0668 = 0.9322 \end{aligned}$$

(c) 由轉換公式及圖示並查表,

$$\begin{aligned} &P(75 < X < 110) \\ &= P\left(\frac{75-100}{20} < Z < \frac{110-100}{20}\right) \\ &= P(-1.25 < Z < 0.5) \\ &= P(Z < 0.5) - P(Z \leq -1.25) \\ &= 0.6915 - 0.1056 = 0.5859 \end{aligned}$$

例 4. 設嬰兒重量 $X \sim N(7.4, 1.2)$ (單位: 磅), 則根據轉換公式, 對稱性並查表,

$$\begin{aligned} P(X > 9.2) &= P\left(Z > \frac{9.2-7.4}{1.2}\right) \\ &= P(Z > 1.5) = P(Z < -1.5) \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

例 5. 袋裝洋芋的重量 $X \sim N(50, 0.5)$ (單位: 磅), 則 (a) 由轉換公式, 對稱性並查表,

$$\begin{aligned} P(X > 51) &= P\left(Z > \frac{51-50}{0.5}\right) \\ &= P(Z > 2) = P(z < -2) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

(b) 根據轉換公式並查表,

$$\begin{aligned} P(X < 49) &= P\left(Z < \frac{49-50}{0.5}\right) \\ &= P(Z < -2) = 0.0228 \end{aligned}$$

(c) 根據圖示及餘集的機率公式並查表, 得

$$\begin{aligned} & P(49 < X < 51) \\ &= 1 - P(X \geq 51) - P(X \leq 49) \\ &= 1 - 2(0.0228) \\ &= 1 - 0.0456 = 0.9544 \end{aligned}$$

例 6. 某高中的 GPA (grade-point average, 平均等第點數) $X \sim N(2.7, 0.4)$. 若前 10% 的學生有資格申請州立大學, 試問有申請資格的最低 GPA 爲何?

<解> 設 x 爲有資格申請的最低 GPA, 依題意, 得

$$P(X > x) = 0.10$$

接著, 根據轉換公式,

$$P(X > x) = P\left(Z > \frac{x - 2.7}{0.4}\right) = 0.10$$

故根據餘集的機率公式,

$$P\left(Z \leq \frac{x - 2.7}{0.4}\right) = 1 - 0.1 = 0.9$$

查表, 得

$$P(Z \leq 1.28) = 0.8997 \approx 0.9$$

故

$$\frac{x - 2.7}{0.4} = 1.28$$

即

$$x = (1.28)(0.4) + 2.7 = 3.2$$

因此, 至少需 3.2 GPA 才有資格申請.