單元 37: 積分表積分
(課本 §7.2)

複習. 至目前爲至, 所學的積分法則爲

1. $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3. $\int e^x dx = e^x + C$

4. $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

二種積分方法爲

1. 代入法. 取

$$u = g(x),\ du = g'(x)dx$$

代入, 得

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

2. 分部積分. 取 u 與 dv, 計算 du 與 v, 得

$$\int udv = uv - \int vdu$$

另一種方法爲查表積分, 根據已知的積分公式, 將被積函數轉換成適當的公式再積分. 積分表分類爲

1. 含 $a + bu$ 的型式 (公式 1-6)

2. 含 $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$ 的型式 (公式 7-12)

3. 含 $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$ 的型式 (公式 13-18)

4. 含 $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$ 的型式 (公式 19-22)

5. 含 e^{au} 與 $\ln u$ 的型式 (公式 23-29)

注意事項. 需先以代入法或其它代數法轉換成完全相同的公式後, 才可使用.

例 1. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{3+x}}dx.$

<解> 根據公式 5:

$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}du = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$$

並令 $u=x$, $a=3$, $b=1$, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int \frac{x}{\sqrt{3+x}}dx \\
&= 2\left[\frac{2}{3}(x-6)\sqrt{3+x}\right]+C \\
&= \frac{4}{3}(x-6)\sqrt{3+x}+C
\end{aligned}$$

例 2. 試求不定積分 $\displaystyle\int x^2\sqrt{3+x^2}dx.$

<解> 根據公式 8:

$$\begin{aligned}
\int u^2\sqrt{a^2+u^2}du &= \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2}- \\
&\quad \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}|+C
\end{aligned}$$

並令 $u = x$, $a = \sqrt{3}$, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{x}{8}(3+2x^2)\sqrt{3+x^2} \\ &\qquad -\frac{9}{8}\ln|x+\sqrt{3+x^2}| + C\end{aligned}$$

例 3. 試求定積分 $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2\sqrt{50-2x^2}}$.

<解> 根據公式 21:

$$\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$$

將分母中的 2 提出化簡, 並令 $u = x$, $a = 5$, 先求不定積分, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{50-2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C\right) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{50}\right)\frac{\sqrt{25-x^2}}{x} + C\end{aligned}$$

接著, 根據微積分基本定理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{\sqrt{25-16}}{4}-\frac{\sqrt{25-9}}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{-7}{12}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{600} \end{aligned}$$

例 4. 試求不定積分 $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{5+2e^x}dx$.

<解> 先以代入法化簡, 即令 $u=e^x$, $du=e^xdx$, 得

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\sqrt{5+2e^x}dx &= \int e^x\sqrt{5+2e^x}e^xdx \\ &= \int u\sqrt{5+2u}du \end{aligned}$$

接著, 根據公式 4:

$$\int u\sqrt{a+bu}du=\frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$$

並令 $a=5$, $b=2$ 且將 $u=e^x$ 代回, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{2}{15(4)}[3(2)u-2(5)](5+2u)^{3/2}+C \\ &= \frac{1}{15}(3u-5)(5+2u)^{3/2}+C \\ &= \frac{1}{15}(3e^x-5)(5+2e^x)^{3/2}+C \end{aligned}$$

例 5. 試求不定積分 $\int x^2 e^{(-1/2)x} dx$.

<解> 根據公式 24:

$$\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$$

先代 $n = 2$, $a = -1/2$, $u = x$ 後, 再第二次使用相同公式, 代 $n = 1$, $a = -1/2$, $u = x$, 得

$$\begin{aligned}
&\int x^2 e^{(-1/2)x} dx \\
&= -2x^2 e^{(-1/2)x} + 4 \int x e^{(-1/2)x} dx \\
&= -2x^2 e^{-x/2} \\
&\qquad + 4\left(-2x e^{-x/2} + 2 \int e^{-x/2} dx\right) \\
&= -2x^2 e^{-x/2} - 8x e^{-1/2x} \\
&\qquad + 8(-2) e^{-x/2} + C \\
&= -2(x^2 + 4x + 8) e^{-x/2} + C
\end{aligned}$$

例 6. 預估未來 2 年內, t 月後的質押貸款年利率爲

$$r(t) = \frac{6t + 75}{t + 10}, \ 0 \le t \le 24$$

試求 12 個月內的平均質押貸款年利率.

<解> 根據平均值的定義及公式 1:

$$\int \frac{u}{a+bu}du = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|)+C$$

並代 $a=10$, $b=1$, $u=t$, 得平均質押貸款年利率

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{12-0}\int_0^{12}\frac{6t+75}{t+10}dt \\
&= \frac{1}{12}\left(\int_0^{12}\frac{6t}{t+10}dt+\int_0^{12}\frac{75}{t+10}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{12}\frac{t}{t+10}dt+\frac{25}{4}\int_0^{12}\frac{1}{t+10}dt \\
&= \frac{1}{2}[10+t-10\ln(t+10)]\Big|_0^{12} \\
&\qquad\qquad +\frac{25}{4}\ln(t+10)\Big|_0^{12} \\
&= \frac{1}{2}(10+t)\Big|_0^{12}+\left(-5+\frac{25}{4}\right)\ln(t+10)\Big|_0^{12} \\
&= \frac{1}{2}(22-10)+\frac{5}{4}\ln(t+10)\Big|_0^{12} \\
&= 6+\frac{5}{4}(\ln 22-\ln 10) \\
&= 6+\frac{5}{4}\ln\left(\frac{22}{10}\right)=6+\frac{5}{4}\ln\left(\frac{11}{5}\right)
\end{aligned}$$

Self-Check Exercises

1. 試求定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}}$.

<解> 根據公式 22:

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$$

並代 $u = x$, $a = \sqrt{5}$, 得

$$\int_0^2 \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \left.\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}\right|_0^2 = \frac{2}{5\sqrt{5-4}} = \frac{2}{5}$$

2. 設流感爆發 t 天後的感染數爲

$$N(t) = \frac{200}{1+9e^{-0.8t}}$$

試求流感爆發後, 前 10 天的平均感染人數.

<解> 由定義, 平均感染數

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{10-0}\int_0^{10} \frac{200}{1+9e^{-0.8t}}dt \\ &= 20\int_0^{10} \frac{1}{1+9e^{-0.8t}}dt \end{aligned}$$

根據公式 25:

$$\int \frac{du}{1+be^{au}} = u - \frac{1}{a}\ln(1+be^{au}) + C$$

代 $a=-0.8$, $b=9$, 以及 $u=t$, 得

$$\begin{aligned}
A &= 20\int_0^{10} \frac{1}{1+9e^{-0.8t}}dt \\
&= 20\left[t + \frac{1}{0.8}\ln(1+9e^{-0.8t})\right]\Big|_0^{10} \\
&= 20\left[\left(10+\frac{5}{4}\ln(1+9e^{-8})\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\left(0+\frac{5}{4}\ln(1+9)\right)\right] \\
&= 200 + 25\ln\left(\frac{1+9e^{-8}}{10}\right) \approx 143
\end{aligned}$$

Exercises

10. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+8x^2}}$.

<解> 根據公式 10:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$$

將分母根號內的 8 提出化簡, 並令 $u = x$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 得不定積分

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{4+8x^2}} &= \int \frac{dx}{x\sqrt{8}\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x} \right| \right) + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+2x^2}+1)}{x} \right| + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x^2}+1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + C \\
&= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x^2}+1}{x} \right| + C
\end{aligned}
$$

其中最後一個等號成立, 乃因爲 $-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + C$ 仍爲一常數, 根據約定, 以 C 表示.

19. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$.

<解> 根據代入法, 取

$$u = \ln(x+1),\ du = \frac{1}{x+1}dx$$

得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} &= \int \underbrace{\frac{1}{\ln(x+1)}}_{1/u}\underbrace{\frac{1}{x+1}dx}_{du} \\ &= \ln|\ln(x+1)| + C\end{aligned}$$

20. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}dx$.

<解> 根據代入法, 取

$$u = \ln(x^2+1),\ du = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

並調整係數, 得

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{1}{\ln(x^2+1)}}_{1/u}\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}dx}_{du} \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(\ln(x^2+1)) + C\end{aligned}$$

其中最後一式的 $\ln(x^2+1)$ 恆不爲負, 故可表成小括號.

23. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{3e^x}{1+e^{x/2}}dx$.

<解> 根據代入法，取

$$u = 1 + e^{x/2},\ du = \frac{1}{2}e^{x/2}dx$$

並調整係數，再整理分子，得

$$\begin{aligned}
\int \frac{3e^x}{1+e^{x/2}}dx &= 3(2)\int \frac{e^{x/2}}{1+e^{x/2}}\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)dx \\
&= 6\int \frac{u}{1+u}du = 6\int \frac{1+u-1}{1+u}du \\
&= 6\int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = 6(u - \ln|1+u|) + C \\
&= 6[e^{x/2} - \ln(1+e^{x/2})] + C
\end{aligned}$$

24. 試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1-2e^{-x}}dx$.

<解> 先同乘除 e^x，再根據代入法，取

$$u = e^x - 2,\ du = e^x dx$$

得

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-2e^{-x}}dx &= \int \frac{e^x}{e^x-2}dx = \int \underbrace{\frac{1}{e^x-2}}_{1/u}\underbrace{e^x dx}_{du} \\
&= \ln|e^x - 2| + C
\end{aligned}$$

25．試求不定積分 $\int \frac{\ln x}{x(2+3\ln x)}dx$.

<解> 先根據代入法，取

$$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx$$

再根據公式 1:

$$\int \frac{udu}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|)+C$$

取 $a=2$，$b=3$，得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x(2+3\ln x)}dx &= \int \frac{\ln x}{2+3\ln x}\frac{1}{x}dx \\
&= \int \frac{u}{2+3u}du \\
&= \frac{1}{9}(2+3u-2\ln|2+3u|)+C \\
&= \frac{1}{9}(2+3\ln x-2\ln|2+3\ln x|)+C
\end{aligned}$$

<另解> 根據代入法，取

$$u = 2+3\ln x,\ du = \frac{3}{x}dx$$

以及

$$\ln x = \frac{u-2}{3}$$

並調整係數, 得

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x(2+3\ln x)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+3\ln x}(\ln x)\left(\frac{3}{x}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\left(\frac{u-2}{3}\right)du = \frac{1}{9}\int \left(1-\frac{2}{u}\right)du \\
&= \frac{1}{9}(u-2\ln|u|)+C \\
&= \frac{1}{9}(2+3\ln x-2\ln|2+3\ln x|)+C
\end{aligned}
$$

30. 試求不定積分 $\displaystyle\int x^3\ln x dx$.

<解> 根據分部積分, 取

$$u=\ln x,\ dv=x^3dx$$

得

$$du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{1}{4}x^4$$

以及

$$
\begin{aligned}
\int x^3\ln x dx &= \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx \\
&= \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C
\end{aligned}
$$

31. 試求不定積分 $\displaystyle\int(\ln x)^3dx$.

<解> 根據分部積分，取

$$u=(\ln x)^3,\ dv=dx$$

得

$$du=3(\ln x)^2\frac{1}{x}dx,\ v=x$$

以及

$$\int(\ln x)^3dx=x(\ln x)^3-3\int(\ln x)^2dx \tag{1}$$

再一次根據分部積分，取

$$u=(\ln x)^2,\ dv=dx$$

得

$$du=2(\ln x)\frac{1}{x}dx,\ v=x$$

以及由 (1) 式，

$$\begin{aligned}
&\int(\ln x)^3dx\\
&= x(\ln x)^3-3\left[x(\ln x)^2-2\int\ln x dx\right]\\
&= x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6\int\ln x dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

第三次根據分部積分，取

$$u=\ln x,\ dv=dx$$

得

$$du = \frac{1}{x}dx,\ \ v = x$$

以及由 (2) 式,

$$\begin{aligned}
&\int (\ln x)^3 dx \\
&= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\left(x\ln x - \int 1dx\right) \\
&= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C
\end{aligned}$$