單元 35: 定積分在商業與經濟上的應用
(課本 §6.7)

設需求函數爲 $p = D(x)$ 且市場單價爲 $\overline{p}$, 銷售量爲 $\overline{x}$, 如圖示.

消費者願付價 $D(x)$ 與實付價 $\overline{p}$ 間省的差額, 稱作消費者剩餘 (consumers' surplus).

如何計算消費者剩餘?

將 $[0, \overline{x}]$ n 等分, 得子區間長度 $\Delta x = \frac{\overline{x}}{n}$ 並在每個子區間內取右端點, 得代表點 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 則對第一個 Δx 單位的物品, 消費者至少願付 $D(x_1)$, 但實付 $\overline{p}$, 故至少省下

$$D(x_1)\Delta x - \overline{p}\Delta x = [D(x_1) - \overline{p}]\Delta x$$

對第二個 Δx 單位的物品, 至少願付 $D(x_2)$, 但實付 $\overline{p}$, 故至少省下

$$D(x_2)\Delta x - \overline{p}\Delta x = [D(x_2) - \overline{p}]\Delta x$$

類推, 對最後一個 Δx 單位的物品, 至少省下

$$[D(x_n) - \overline{p}]\Delta x$$

合併, 得銷售 $\overline{x}$ 件物品, 共可省下至少

$$\begin{aligned}
&[D(x_1)-\overline{p}]\Delta x+[D(x_2)-\overline{p}]\Delta x+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +[D(x_n)-\overline{p}]\Delta x \\
&=[D(x_1)+D(x_2)+\cdots+D(x_n)]\Delta x \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -\underbrace{(\overline{p}+\cdots+\overline{p})}_{\text{共 } n \text{ 個}}\Delta x \\
&=\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x-n\overline{p}\Delta x=\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x-\overline{p}\,\overline{x}
\end{aligned}$$

其中第一項乃連續函數 $D(x)$ 在 $[0,\overline{x}]$ 上的黎曼和.

故令 $n\to\infty$ 並根據定積分的定義, 可定義消費者剩餘

$$\begin{aligned}
CS &\overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x-\overline{p}\,\overline{x}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\Delta x-\overline{p}\,\overline{x} \\
&= \int_0^{\overline{x}} D(x)dx-\overline{p}\,\overline{x}
\end{aligned}$$

就是介於 $D(x)$ 與 $\overline{p}$ 間的區域面積. 因此, 得

定義. 消費者剩餘

$$CS \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\overline{x}} D(x)dx-\overline{p}\,\overline{x}=\int_0^{\overline{x}}[D(x)-\overline{p}]dx$$

其中 $D(x)$ 爲需求函數, $\overline{p}$ 爲市場單價且 $\overline{x}$ 爲銷售量, 如圖示.

設供給函數爲 $p = S(x)$ 且市場單價爲 $\overline{p}$, 供給量爲 $\overline{x}$, 如圖示.

生產者 (廠商) 實得 (實收) 價 $\overline{p}$ 與願得 (願收) 價 $S(x)$ 間多得的差額, 稱作生產者剩餘 (producers' surplus).

如何計算生產者剩餘?

將 $[0, \overline{x}]$ n 等分, 得子區間長度 $\Delta x = \frac{\overline{x}}{n}$ 並在每個子區間內取右端點, 得代表點 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 則對第一個 Δx 單位的物品, 生產者至少多得

$$\overline{p}\Delta x - S(x_1)\Delta x = [\overline{p} - S(x_1)]\Delta x$$

對第二個 Δx 單位的物品, 生產者至少多得

$$\overline{p}\Delta x - S(x_2)\Delta x = [\overline{p} - S(x_2)]\Delta x$$

$$\vdots$$

類推, 對第 n 個 Δx 單位的物品, 生產者至少多得

$$\overline{p}\Delta x - S(x_n)\Delta x = [\overline{p} - S(x_n)]\Delta x$$

合併, 得供給 $\overline{x}$ 件物品, 共可多得至少

$$\begin{aligned}
&[\overline{p}-S(x_1)]\Delta x+[\overline{p}-S(x_2)]\Delta x+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +[\overline{p}-S(x_n)]\Delta x \\
= \ & \underbrace{[\overline{p}+\cdots+\overline{p}]}_{\text{共 } n \text{ 項}}\Delta x \\
&\qquad -[S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_n)]\Delta x \\
= \ & n\overline{p}\Delta x-\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x=\overline{p}\,\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x
\end{aligned}$$

其中第二項乃連續函數 $S(x)$ 在 $[0,\overline{x}]$ 上的黎曼和.

故根據定積分的定義並令 $n\to\infty$, 可定義生產者剩餘

$$\begin{aligned}
PS &\overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\overline{p}\,\overline{x}-\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\right) \\
&= \overline{p}\,\overline{x}-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}S(x_i)\Delta x \\
&= \overline{p}\,\overline{x}-\int_0^{\overline{x}}S(x)dx
\end{aligned}$$

就是介於 $\overline{p}$ 與 $S(x)$ 間的區域面積. 因此, 得

定義. 生產者剩餘

$$PS\overset{\text{def}}{=}\overline{p}\,\overline{x}-\int_0^{\overline{x}}S(x)dx=\int_0^{\overline{x}}[\overline{p}-S(x)]dx$$

其中 $S(x)$ 爲供給函數, $\overline{p}$ 爲市場單價且 $\overline{x}$ 爲供給量, 如圖示.

例 1. 設某品牌十段變數自行車的需求函數爲

$$p = D(x) = -0.001x^2 + 250$$

且供給函數爲

$$p = S(x) = 0.0006x^2 + 0.02x + 100$$

(單位: x 千輛, p 元). 試求市場單價設定爲平衡價的 CS 與 PS.

<解> 如圖示, 求交點得平衡價及供銷量, 乃相當於解

$$-0.001x^2 + 250 = 0.0006x^2 + 0.02x + 100$$

即

$$0.0016x^2 + 0.02x - 150 = 0$$

同乘 10000, 得

$$16x^2 + 200x - 1,500,000 = 0$$

同除 8, 得

$$2x^2 + 25x - 187,500 = 0$$

分解, 得

$$(x-300)(2x+625)=0$$

故 $x=300$ 且 $x=-\frac{625}{2}$ (不合). 代 $x=300$, 得

$$p=-0.001(300)^2+250=-90+250=160$$

因此, 供需平衡點為 $(300,160)$ 且根據題意, 市場的單價 $\overline{p}=160$ 且供銷量 $\overline{x}=300$. 最後, 根據定義, 消費者剩餘

$$\begin{aligned}
CS &= \int_0^{300}(-0.001x^2+250)dx \\
&\qquad -(160)(300) \\
&= -\frac{0.001}{3}x^3+250x\Big|_0^{300}-48,000 \\
&= \left[-\frac{(300)^3}{3000}+250(300)-0\right]-48,000 \\
&= -9,000+75,000-48,000=18,000
\end{aligned}$$

即 \$18,000,000. 又生產者剩餘

$$\begin{aligned}
PS &= (160)(300)- \\
&\qquad \int_0^{300}(0.0006x^2+0.02x+100)dx \\
&= 48,000- \\
&\qquad (0.0002x^3+0.01x^2+100x)\Big|_0^{300} \\
&= 48,000-(5400+900+30,000) \\
&= 11,700
\end{aligned}$$

即 \$11,700,000.

如何計算一段期限內, 收入流 (income stream) 再轉投資後的總未來值 (total future value) 或累積未來值 (accumulated future value)?

設 $R(t)$ 爲在 t 時的收入產生率 (rate of income generation) (元/年), r 爲連續複利的年利率且 T 爲期限 (term) (年).

將 $[0, T]$ n 等分, 得每個子區間的長度 $\Delta t = \frac{T}{n}$ 且在每個子區間內取右端點, 得代表點 $t_1, t_2, \ldots, t_n = T$, 如圖示. 則在第一個 Δt 時間內,

$$\text{收入} \approx R(t_1)\Delta t$$

並以期限 $T - t_1$ 的連續複利轉投資, 得總未來值 (根據公式 $A = Pe^{rt}$)

$$R(t_1)\Delta t e^{r(T-t_1)}$$

在第二個 Δt 時間內,

$$\text{收入} \approx R(t_2)\Delta t$$

並以期限 $T - t_2$ 的連續複利轉投資, 得總未來值

$$R(t_2)\Delta t e^{r(T-t_2)}$$

類推, 在第 n 個 Δt 時間內,

$$\text{收入} \approx R(t_n)\Delta t$$

並以期限 $T - t_n$ 的連續複利轉投資, 得總未來值

$$R(t_n)\Delta t e^{r(T-t_n)}$$

合併, 在 $[0, T]$ 內, 收入流的

$$\begin{aligned}
\text{總未來值} & \\
\approx\ & R(t_1)e^{r(T-t_1)}\Delta t + R(t_2)e^{r(T-t_2)}\Delta t + \cdots \\
& + R(t_n)e^{r(T-t_n)}\Delta t \\
=\ & e^{rT}[R(t_1)e^{-rt_1} + R(t_2)e^{-rt_2} + \cdots \\
& + R(t_n)e^{-rt_n}]\Delta t \\
=\ & e^{rT}\left(\sum_{i=1}^{n} R(t_i)e^{-rt_i}\Delta t\right)
\end{aligned}$$

其中累加和爲連續函數 $R(t)e^{-rt}$ 在 $[0, T]$ 上的黎曼和. 故根據定積分的定義並令 $n \to \infty$, 可定義收入流的總(累積) 未來值

$$\begin{aligned}
A \ \overset{\text{def}}{=}\ & \lim_{n\to\infty} e^{rT}\left(\sum_{i=1}^{n} R(t_i)e^{-rt_i}\Delta t\right) \\
=\ & e^{rT} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} R(t_i)e^{-rt_i}\Delta t \\
=\ & e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}dt
\end{aligned}$$

因此, 得

定義. 收入流 (產生率) $R(t)$ (元/年) 在連續複利年利率 r 下, T 年期的總 (累積) 未來值

$$A = e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}dt$$

例 2. 設一洗車公司在未來 5 年內, t 年後的營收率爲 \$40,000 並將收入以相當於連續複利 12% 轉投資. 試求 5 年後此收入流的總累積值.

<解> 代 $R(t) = 40,000$, $r = 0.12$, $T = 5$, 得未來值

$$\begin{aligned}
A &= e^{0.12(5)}\int_0^5 40,000e^{-0.12t}dt \\
&= e^{0.6}\left(-\frac{40,000}{0.12}e^{-0.12t}\right)\Big|_0^5 \\
&= -\frac{40,000}{0.12}e^{0.6}(e^{-0.6}-1) \\
&= \frac{4,000,000}{12}(e^{0.6}-1) \\
&= \frac{1,000,000}{3}(e^{0.6}-1) \\
&\approx 274,039.6
\end{aligned}$$

另一度量收入流的方式爲計算此收入流的現值, 定義爲在年利率 r 的連續複利下, 能產生與收入流未來值相同結餘的資金 P, 即根據結餘公式 $A = Pe^{rt}$, 此資金 P 在連續複利的結餘

$$Pe^{rT} = e^{rT} \int_0^T R(t)e^{-rt}dt$$

收入流的未來值.

同除 e^{rT}, 得收入流 (產生率) $R(t)$ (元/年) 在連續複利年利率 r 下, T 年期的現值

$$PV = \int_0^T R(t)e^{-rt}dt$$

例 3 戲院老闆有兩種改善經營的方案. 方案 A 爲投資 \$250,000 且預估未來 3 年淨收入流的產生率爲

$$f(t) = 630,000 \text{ 元/年}$$

方案 B 爲投資 \$180,000 且預估未來 3 年淨收入流的產生率爲

$$g(t) = 580,000 \text{ 元/年}$$

若未來 5 年的年利率爲 10%, 試問 3 年後, 哪個方案有較高的淨收入 (net income)?

<解> 以淨收入的現值比較. 方案 A, 淨收入的

$$
\begin{aligned}
\text{現值}_A &= \int_0^3 630,000e^{-0.1t}dt - 250,000 \\
&= \frac{630,000}{-0.1}e^{-0.1t}\Big|_0^3 - 250,000 \\
&= -6,300,000(e^{-0.3}-1) - 250,000 \\
&= 6,300,000(1-e^{-0.3}) - 250,000 \\
&\approx 1,382,845
\end{aligned}
$$

方案 B, 淨收入的

$$
\begin{aligned}
\text{現值}_B &= \int_0^3 580,000e^{-0.1t}dt - 180,000 \\
&= \frac{580,000}{-0.1}e^{-0.1t}\Big|_0^3 - 180,000 \\
&= -5,800,000(e^{-0.3}-1) - 180,000 \\
&= 5,800,000(1-e^{-0.3}) - 180,000 \\
&\approx 1,323,254
\end{aligned}
$$

比較後, 方案 A 在 3 年後有較高的淨收入.

一序列的定期 (regular time intervals) 支付額 (投資, payments) 稱作年金 (annuity),

年金總額 (amount, 結餘) 爲支付總額及利息的和.

如何求? 設 P 爲每次的支付額, r 爲連續複利的年利率, T 爲期限 (年) 且 m 爲一年的支付次數, 則年金的支付乃形成一收入生產率爲 $R(t) = mP$ 的常數收入流, 故 T 年期年金總額

$$\begin{aligned} A &= e^{rT}\int_0^T R(t)e^{-rt}dt \\ &= e^{rT}\int_0^T mPe^{-rt}dt = mPe^{rT}\left(-\frac{e^{-rt}}{r}\right)\Big|_0^T \\ &= mPe^{rT}\left(-\frac{e^{-rT}}{r}+\frac{1}{r}\right) = \frac{mP}{r}(e^{rT}-1) \end{aligned}$$

因此, 年金總額

$$A = \frac{mP}{r}(e^{rT}-1)$$

例 4. 由 1994 年 1 月 1 日開始, 一年一次存 \$2000 至一連續複利 5% 生息的個人退休帳戶 (IRA, Individual Retirement Account) 內. 試問至 2010 年年初此個人退休帳戶的總額爲何?

<解> 代 $P = 2000$, $m = 1$, $r = 0.05$ 以及

$$T = 2010 - 1994 = 16$$

得總額

$$\begin{aligned} A &= \frac{2000}{0.05}(e^{0.05(16)} - 1) \\ &= 40,000(e^{0.8} - 1) \approx 49,021.64 \end{aligned}$$

由定義, 年金的現值 PV 滿足

$$PVe^{rT} = \frac{mP}{r}(e^{rT} - 1)$$

同除 e^{rT}, 得年金的現值

$$PV = \frac{mP}{r}(1 - e^{-rT})$$

例 5. 若在未來 10 年由基金每月提領 \$1000 且此基金可以 6% 的連續複利生息, 試問需要多少金額成立此基金?

<解> 根據上式, 代 $P = 1000$, $m = 12$, $T = 10$ 以及年利率 $r = 0.06$, 得

$$\begin{aligned} PV &= \frac{(12)(1000)}{0.06}(1 - e^{-0.06(10)}) \\ &= 200,000(1 - e^{-0.6}) \approx 90,237.70 \end{aligned}$$

即需金額 \$90,237.70 成立此基金.

一種度量收入分布 (income distribution) 的方法爲 Lorentz curve, $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 定義爲 $100x\%$ 的最低總收入人口占全部總收入的比率.

如, $f(0.3) = 0.1$ 表示 30% 的最低收入者的收入占全部收入的 10%.

Lorentz curve f 的性質爲

1. 定義域爲 $[0, 1]$.

2. 值域爲 $[0, 1]$.

3. $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$.

4. $f(x) \leq x$, $x \in [0, 1]$.

5. f 遞增.

典型的圖形如圖示.

註 1. $y = f(x) = x$ 稱作完全相等線 (line of complete equality), 因爲 $100x\%$ 最低收入者的收入佔總收入的 $100x\%$.

例 6. 設一開發中國家的收入分布爲

$$f(x) = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$$

如圖示. 則

$$f(0.2) = \frac{19}{20}(0.2)^2 + \frac{1}{20}(0.2) = 0.048$$

表示 20% 的最低收入者的收入總和占總收入的 4.8%.

又

$$f(0.8) = \frac{19}{20}(0.8)^2 + \frac{1}{20}0(0.8) = 0.648$$

表示 80% 的最低收入者的收入和占總收入的 64.8%.

註 2. Lorentz curve 愈靠近完全相等線, 貧富差距愈小, 如圖示.

註 3. 此種接近的程度可由不等係數 (coefficient of inequality) 描述, 定義爲 Loreztz curve 與完全相

等線間的區域面積與完全相等線下的區域面積的比值, 如圖示, 即

$$\begin{aligned}
\text{不等係數} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_1 \text{ 的面積}}{R \text{ 的面積}} \\
&= \frac{\int_0^1 [x - f(x)]dx}{\frac{1}{2}(1)(1)} \\
&= 2\int_0^1 [x - f(x)]dx
\end{aligned}$$

乃一介於 0 與 1 間的數, 愈靠近 0, 收入分布愈均勻; 0 表示收入分布完美均勻 (perfectly uniform).

因此, 一 Lorentz curve 的不等係數或 Gini index

$$L = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx$$

例 7. 設醫生的收入分布爲

$$f(x) = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$$

且演員的收入分布爲

$$g(x) = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x$$

試求各自的不等係數並問哪種職業的收入較均勻 (more equitable)?

<解> 根據公式, 醫生的不等係數

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x\right)\right] dx \\ &= 2\int_0^1 \left(\frac{14}{15}x - \frac{14}{15}x^2\right) dx \\ &= \frac{28}{15}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{28}{15}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{15}\cdot\frac{1}{6} = \frac{14}{45} \approx 0.311 \end{aligned}$$

又演員的不等係數

$$\begin{aligned} L_2 &= 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x\right)\right] dx \\ &= 2\int_0^1 \left(\frac{5}{8}x - \frac{5}{8}x^4\right) dx \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{8} \approx 0.375 \end{aligned}$$

因爲 $L_1 < L_2$, 故醫生的收入較均勻 (more even distributed).

Self-Check Exercises

設運動自行車的需求函數為

$$p = d(x) = \sqrt{9 - 0.02x}$$

且供給函數為

$$p = s(x) = \sqrt{1 + 0.02x}$$

試求在平衡單價的消費者剩餘與生產者剩餘.

<解> 先求平衡點, 即解

$$\sqrt{9 - 0.02x} = \sqrt{1 + 0.02x}$$

平方, 得

$$9 - 0.02x = 1 + 0.02x$$

即

$$0.04x = 8, \; x = \frac{8}{0.04} = \frac{800}{4} = 200$$

且

$$p = \sqrt{1 + 0.02(200)} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

如圖示. 因此, 根據定義, 消費者剩餘

$$CS = \int_0^{200} \sqrt{9 - 0.02x}dx - (\sqrt{5})200$$

且生產者剩餘

$$PS = (\sqrt{5})200 - \int_0^{200} \sqrt{1 + 0.02x}dx$$

接著, 根據線性轉換, 消費者剩餘

$$\begin{aligned}
CS &= -\frac{1}{0.02}\left(\frac{2}{3}\right)(9-0.02x)^{3/2}\Big|_0^{200} - 200\sqrt{5} \\
&= -\frac{100}{3}(5^{3/2}-9^{3/2}) - 200\sqrt{5} \\
&= \frac{100}{3}(27-5\sqrt{5}) - 200\sqrt{5} \\
&= 900 - \frac{500}{3}\sqrt{5} - 200\sqrt{5} \\
&= 900 - \frac{1100}{3}\sqrt{5} \approx 79.32
\end{aligned}$$

且生產者剩餘

$$\begin{aligned}
PS &= 200\sqrt{5} - \frac{1}{0.02}\left(\frac{2}{3}\right)(1+0.02x)^{3/2}\Big|_0^{200} \\
&= 200\sqrt{5} - \frac{100}{3}(5^{3/2}-1) \\
&= 200\sqrt{5} - \frac{100}{3}(5\sqrt{5}-1) \\
&= 200\sqrt{5} - \frac{500}{3}\sqrt{5} + \frac{100}{3} \\
&= \frac{100}{3}\sqrt{5} + \frac{100}{3} \approx 108.66
\end{aligned}$$

18. 樂透中獎金額的給付方式爲每年每次 \$50,000 共 20 年. 若年利率爲 6% 的連續複利, 試求中獎金額的現值.

<解> 代 $P = 50,000$, $r = 0.06$, $T = 20$, 以及 $m = 1$, 得現值

$$
\begin{aligned}
PV &= \frac{(1)(50,000)}{0.06}(1 - e^{-0.06(20)}) \\
&= \frac{5,000,000}{6}(1 - e^{-1.2}) \\
&= \frac{2,500,000}{3}(1 - e^{-1.2}) \approx 582338.2
\end{aligned}
$$

19. 欲申請一 RAM (reverse annuity mortgage) 以致於未來 10 年的退休收入爲 \$300/月. 若年利率爲 8% 的連續複利, 問需貸款多少金額?

<解> 由題意, 乃相當於求年金的現值, 故代 $P = 300$, $r = 0.08$, $m = 12$, 以及 $T = 10$, 得貸款金額

$$
\begin{aligned}
PV &= \frac{(12)(300)}{0.08}(1 - e^{0.08(10)}) \\
&= \frac{360,000}{8}(1 - e^{-}0.8) \\
&= 45,000(1 - e^{-0.8}) \approx 24780.2
\end{aligned}
$$