單元 33: 定積分的計算
(課本 §6.5)

由定積分的定義, 即定積分等於黎曼和的極限, 可推導出

定積分的性質. 設 f 與 g 均可積, 則

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

性質 3 與性質 4 合併稱作定積分的線性性値, 即可逐項積分.

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

<說明> 1. 如圖示, 在 $x = a$ 上, 定積分爲一段線段的面積, 故爲 0.

2. 如圖示, 方向相反時, 於黎曼和內計算子區間長度時, 差一負號, 故得證.

3. 如圖示, 將函數值放大 c 倍, 面積增爲 c 倍.

4. 如圖示, 和差的面積等於面積的和差.

5. 如圖示, 在 $[a, b]$ 上的面積等於在 $[a, c]$ 與 $[c, b]$ 上的面積和.

例 1. 試求定積分 $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}dx$.

<解> 方法 1. 代入

$$u = 9 + x^2,\ du = 2xdx$$

調整係數並將結果表成 x 的數學式, 再代 x 的積分上下界, 計算定積分, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^4 \underbrace{\sqrt{9+x^2}}_{\sqrt{u}}\underbrace{(2x)dx}_{du} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(9+x^2)^{3/2}\Big|_0^4 \\
&= \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}
\end{aligned}$$

方法 2. 取

$$u = 9 + x^2,\ du = 2xdx$$

得

$$xdx = \frac{1}{2}du$$

以及

$$x = 0,\ u = 9;\ x = 4,\ u = 25$$

代入，將積分結果表成 u 的數學式並代 u 的積分上下界(按所對應的 x 的位置，不是 u 值的大小)，計算定積分，得

$$\begin{aligned}\int_0^4 x\sqrt{9+x^2}dx &= \int_9^{25} \frac{1}{2}\sqrt{u}du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_9^{25} \\ &= \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}\end{aligned}$$

例 2. 試求 $\int_0^2 xe^{2x^2}dx$.

<解> 代

$$u = 2x^2,\ du = 4xdx$$

並調整係數, 得

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{2x^2}dx &= \frac{1}{4}\int_0^2 \underbrace{e^{2x^2}}_{e^u}\underbrace{(4x)dx}_{du} \\ &= \frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(e^8-1)\end{aligned}$$

例 3. 試求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx.$

<解> 代

$$u = x^3+1,\ du = 3x^2dx$$

並調整係數, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^3+1}}_{1/u}\underbrace{(3x^2)dx}_{du} \\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+1|\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2\end{aligned}$$

例 4. 設 R 爲 $f(x)=e^{x/2}$ 在 $[-1,1]$ 上所圍出的區域. 試求 R 的面積.

<解> 由圖示, 面積

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} e^{x/2}dx \\ &= 2e^{x/2}\Big|_{-1}^{1} = 2(e^{1/2} - e^{-1/2}) \end{aligned}$$

平均值. 1. n 個數 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的

$$\text{平均值} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

2. 設 f 在 $[a,b]$ 上連續. 如何定義 f 在 $[a,b]$ 上的平均值?

如圖示, 將 $[a,b]$ n 等分, 得子區間長度 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, 並由每一個子區間內任取一點, 得代表點

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

則此 n 點函數值的

$$\begin{aligned} \text{平均值} &= \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 並根據 f 在 $[a,b]$ 上黎曼和的極限就是定積分的定義, 可定義 f 在 $[a,b]$ 上的

$$\begin{aligned} \text{平均值} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \\ &= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}_{\text{黎曼和}} \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

綜合, 得平均值的

定義. 設 f 在 $[a,b]$ 上可積, 則 f 在 $[a,b]$ 上的

$$\text{平均值} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

例 5. 試求 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0,4]$ 上的平均值.

<解> 根據定義,

$$\begin{aligned} \text{平均值} &= \frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right) x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{6}(8) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

例 6. 設 6 個月內的貸款利率約爲

$$r(t) = -\frac{1}{12}t^3 + \frac{7}{8}t^2 - 3t + 12,\ 0 \le t \le 6$$

問此 6 個月內的平均貸款利率爲何?

<解> 由定義,

$$\begin{aligned} \text{平均利率} &= \frac{1}{6}\int_0^6 \left(-\frac{1}{12}t^3 + \frac{7}{8}t^2 - 3t + 12\right) dt \\ &= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{48}t^4 + \frac{7}{24}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 12t\right)\Big|_0^6 \\ &= \frac{1}{6}(-27 + 63 - 54 + 72) = 9 \end{aligned}$$

例 7. 服藥 t 天後在人體內的含量爲 $C(t) = 5e^{-0.2t}$. 試求頭 4 天內的平均含量.

<解> 由定義,

$$\begin{aligned} \text{平均含量} &= \frac{1}{4}\int_0^4 5e^{-0.2t} dt \\ &= \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{0.2}\right) e^{-0.2t}\Big|_0^4 \\ &= -\frac{25}{4}(e^{-0.8} - e^0) \\ &= \frac{25}{4}(1 - e^{-0.8}) \approx 3.44 \end{aligned}$$

平均值的幾何意義．設 f 在 $[a,b]$ 上非負，則

$$面積 = \int_a^b f(x)dx$$

又

$$平均值 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

故函數所圍出的區域面積

$$\int_a^b f(x)dx = (平均值)(b-a)$$

等於高爲平均值且底爲 $[a,b]$ 的矩形面積，如圖示．也就是說，一定可以找到一個高爲平均值且底爲 $[a,b]$ 的矩形與圍出的區域有相同的面積.

Explore and Discuss

設

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

試求 f 在 $[0,2]$ 上所圍出區域的面積.

<解> 根據定積分的幾何意義及拆解性質 (性質 5)，面積

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

接著, 根據 f 所對應的數學式, 由上式, 得面積

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

Self-Check Exercises

1. 試求定積分 $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx$.

<解> 根據線性轉換,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{2x+5}dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(2x+5)^{3/2}\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(9^{3/2}-5^{3/2}) = \frac{1}{3}(27-5^{3/2}) \end{aligned}$$

Exercises

7. 試求 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$.

<解> 根據線性轉換,

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}(2)(2x+1)^{1/2}\Big|_0^2 = \sqrt{5}-1$$

12. 試求 $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3+\frac{3}{4}\right)(x^4+3x)^{-2}dx.$

<解> 代

$$u = x^4+3x,\ du = (4x^3+3)dx$$

並調整係數, 得

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \left(x^3+\frac{3}{4}\right)(x^4+3x)^{-2}dx \\
= \ & \frac{1}{4}\int_1^2 \underbrace{(x^4+3x)^{-2}}_{u^{-2}}\underbrace{(4x^3+3)dx}_{du} \\
= \ & \frac{1}{4}(-1)\frac{1}{x^4+3x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{4}\right) \\
= \ & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{22}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{11-2}{44}\right) = \frac{9}{176}
\end{aligned}$$

14. 試求 $\displaystyle\int_1^4 x\sqrt{x+1}dx.$

<解> 代入

$$u = x+1,\ du = dx,\ x = u-1$$

與對應的 u 值

$$x=1,\ u=2;\ x=4,\ u=5$$

(按 x 值所在的位置), 並展開後逐項積分, 得

$$
\begin{aligned}
&\int_1^4 x\sqrt{x+1}dx = \int_2^5 (u-1)\sqrt{u}du \\
&= \int_2^5 (u^{3/2} - u^{1/2})du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_2^5 \\
&= \left[\frac{2}{5}(5)^{5/2} - \frac{2}{3}(5)^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{5}(2)^{5/2} - \frac{2}{3}(2)^{3/2}\right] \\
&= \left(10\sqrt{5} - \frac{10}{3}\sqrt{5}\right) - \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{20}{3}\sqrt{5} - \frac{4}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

20. 試求 $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

<解> 代

$$u = \sqrt{x},\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

並調整係數, 得

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int_0^4 \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{e^u} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}_{du} \\
&= 2e^{\sqrt{x}}\Big|_0^4 = 2(e^2 - 1)
\end{aligned}
$$

24. 試求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx.$

<解> 代

$$u = 1+e^x,\ du = e^x dx$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx &= \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{1/u}\underbrace{e^x dx}_{du} \\ &= \ln(1+e^x)\Big|_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2\end{aligned}$$

27. 試求定積分 $\displaystyle\int_1^2 \left(2e^{-4x} - \frac{1}{x^2}\right)dx.$

<解> 根據線性轉換並逐項積分, 得

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \left(2e^{-4x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{1}{x}\Big|_1^2 \\ =\ &\left(-\frac{1}{2}e^{-8} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-4} + 1\right) \\ =\ &\frac{1}{2}e^{-4} - \frac{1}{2}e^{-8} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

61. 設池塘於有機廢棄物置入 t 天後的含氧量百分比爲

$$f(t) = 100\left(\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}\right)$$

試求前 10 天的含氧量平均百分比.

<解> 首先, 根據長除法, 改寫被積函數, 得

$$\begin{aligned}\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100} &= 1-\frac{10t}{t^2+20t+100}\\ &= 1-\frac{10t}{(t+10)^2} = 1-\frac{10(t+10)-100}{(t+10)^2}\\ &= 1-\frac{10}{t+10}+\frac{100}{(t+10)^2}\end{aligned}$$

接著, 代入上式, 並根據平均值的定義及線性轉換, 得平均百分比

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{10}\int_0^{10} 100\left(\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}\right)dt\\ &= 10\int_0^{10}\left(1-\frac{10}{t+10}+\frac{100}{(t+10)^2}\right)dt\\ &= 10\left[t-10\ln|t+10|-\frac{100}{t+10}\right]\Bigg|_0^{10}\\ &= 10[(10-10\ln 20-5)-(-10\ln 10-10)]\\ &= 10(15+10\ln 10-10\ln 20)\\ &= 10\left(15+10\ln\frac{1}{2}\right) = 150-100\ln 2\end{aligned}$$

71. 試求定積分 $\displaystyle\int_3^3(1+\sqrt{x})e^{-x}dx.$

<解> 因爲積分上下界相同, 根據定積分的性質 1,

$$\int_3^3 (1+\sqrt{x})e^{-x}dx = 0$$

72. 給定 $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = 4$, 試求 $\displaystyle\int_3^0 f(x)dx$.

<解> 根據性質 2, 顛倒積分上下界需變號, 故

$$\int_3^0 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx = -4$$

75. T, 因爲積分上下界相同.

76. F, 因爲 $\frac{1}{x-2}$ 在 $x=2$ 不連續.

77. F, 因爲不可將數學式 $\sqrt{x+1}$ 提出積分符號外.

78. T, 因爲 f' 連續, 根據微積分基本定理, 成立.

79. T, 因爲被積函數 f 與 g 連續且 k 爲一常數, 根據定積分性質, 成立.

80. T, 因爲被積函數 f 連續且 $a<c<b$, 根據定積分性質並移項整理, 成立.