單元 6: 極限
(課本 §1.5)

”極限 (limit)” 的概念常出現於日常的用語中, 如

速限 (speed limit)

摔角參賽者的體重限制 (wrestler’s weight limit)

忍耐度 (limit of one’s endurance)

或

彈簧的伸展極限 (a spring’s stretching limit)

等, 均說明極限乃是一個界限 (bound), 在有些情況下是無法達到的, 但在另一些情況下是可達到並超越的.

舉例, 若一彈簧承受的重量大於或等於 10 磅時, 彈簧會壞掉.

問. 如何求彈簧的最大伸展長度?

答. 載重並觀察伸展長度 s 的變化, 如下圖所示. 如果當載重 w 愈接近 10 磅時, 長度 s 會愈接近一實數 L,

則稱當 w 接近 10 磅時, s 的極限為 L. 所以, 最大伸展長度等於當 w 接近 10 磅時, s 的極限.

一. 極限的數學表示法

數學式

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

若且為若當 x 由任意一邊愈來愈靠近 c 時, $f(x)$ 可任意地靠近一實數 L, 如圖示.

例 1. 試求

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1)$$

<解> 令

$$f(x) = x^2 + 1$$

(i) 圖形法: 函數 $f(x)$ 的圖形為一拋物線, 如圖示.

由圖可知, 當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時, $f(x)$ 的值可任意地靠近 2, 故

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$$

(ii) 數值表: 列舉 x 由兩邊靠近 1 時, 所對應出的 $f(x)$ 值, 如下表,

x	.90	.99	.999	1
$f(x)$	1.81	1.98	1.998	2
x	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2	2.002	2.02	2.2

同樣可觀察出, 當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時, $f(x)$ 的值可任意地靠近 2, 故得出相同的結論

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2$$

例 2. 試由函數的圖形求下列各函數在 $x=1$ 的極限.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$

(c) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

<解> (a) 函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 未定義, 且當 $x \neq 1$ 時,

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

故得 $f(x)$ 的圖形爲一在 $x=1$ 有一缺口的直線

$$y=x+1$$

如圖示.

由圖形知, 當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時, $f(x)$ 的值可任意地靠近 2, 故

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

註 1. 雖然 $f(x)$ 在 $x=1$ 未定義 (因爲分母等於 0), 但不影響在 $x=1$ 的極限, 這是因爲極限是考慮 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的值的變化情形, 而不是 $f(x)$ 在 $x=1$ 的值.

(b) 函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 未定義, 且當 $x>1$ 時, $x-1>0$, 故去絕對值時不變號, 得

$$\frac{|x-1|}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$$

同理, 當 $x < 1$ 時, $x - 1 < 0$, 故去絕對值時要加一個負號, 而得

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

因此, 函數 $f(x)$ 的圖形如下圖所示.

由圖知, 當 x 由右邊接近 1 時, $f(x)$ 可任意地靠近 1; 但當 x 由左邊接近 1 時, $f(x)$ 卻是可任意地靠近 -1, 亦即, $f(x)$ 無法同時任意地靠近一個實數 L. 因此,

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ 不存在}$$

(c) 由函數 $f(x)$ 的定義, 當 $x \neq 1$ 時, 圖形爲一條在 $x = 1$ 有一缺口的直線

$$y = x$$

當 $x = 1$ 時, $f(x) = 0$, 而得一個單點

$$(1, 0)$$

因此, 函數 $f(x)$ 的圖形如下圖所示.

由圖知, 當 x 由兩邊愈來愈接近 1 時, $f(x)$ 的值可任意地靠近 1, 故

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

註 2. 雖然 $f(x)$ 在 $x=1$ 有定義且函數值爲 0, 但不影響極限值 1, 此乃因爲極限值是觀察函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的變化, 而不是 $f(x)$ 在 $x=1$ 的函數值.

註 3. 由數值表亦可得到一致的結果, 請參看課本.

結論. 極限的三個重要概念:

(i) 數學式

$$\lim_{x\to c} f(x)=L$$

乃相當於當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時, $f(x)$ 可任意地靠近一實數 L.

(ii) 當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時, 若 $f(x)$ 任意地靠近兩個不同的實數時, 則極限不存在.

(iii) 函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的函數值無法決定 $f(x)$ 在 $x=c$ 的極限, 此乃因爲極限是考慮函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 附近的變化情形, 而不受 $f(x)$ 在 $x=c$ 的值的影響.

二. 極限的性質

令 b, c 爲實數且 n 爲正整數, 則

(1) 常數 b 在 $x=c$ 的極限就是常數自己, 亦即,

$$\lim_{x\to c} b = b$$

因爲無論 x 如何地靠近 c, 所對應的函數值恆爲 b, 故任意地靠近 b, 如圖示.

(2) x 在 $x=c$ 的極限就是 c, 亦即,

$$\lim_{x\to c} x = c$$

因爲當 x 由兩邊愈來愈接近 c 時, 所對應的函數值 x 當然是任意地靠近 c, 如圖示.

(3) x^n 在 $x=c$ 的極限就是 c^n, 亦即,

$$\lim_{x\to c} x^n = c^n$$

舉例, 當 $n=2$ 時, 如圖示,

$$\lim_{x\to c} x^2 = c^2$$

(4) $\sqrt[n]{x}$ 在 $x=c$ 的極限就是 $\sqrt[n]{c}$, 亦即,

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$$

舉例, 當 $n=2$ 時, 如圖示,

$$\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$$

註. 若 n 爲偶數, 則 c 必須大於 0, 否則會出現當 x 接近 c 時, x 爲負, 而導致 $\sqrt[n]{x}$ 未定義的情況.

三. 極限的運算

設

$$\lim_{x\to c}f(x)$$

與

$$\lim_{x\to c}g(x)$$

均存在且 b 爲一實數, 則

(1) 純量乘積: b 倍的極限等於極限的 b 倍, 亦即,

$$\lim_{x\to c}[bf(x)]=b\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]$$

(2) 加減法: 加減的極限等於極限的加減, 亦即

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$$

(3) 乘法: 相乘的極限等於極限的乘積, 亦即,

$$\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to c} g(x)\right]$$

(4) 除法: 商的極限等於極限的商, 亦即, 當

$$\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

時,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

(5) 次方: n 次方的極限等於極限的 n 次方, 亦即,

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

(6) 方根: n 次方根的極限等於極限的 n 次方根, 亦即,

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

四. 求極限的技巧

(1) 代入法 (direct substitution).

結合極限的性質與運算, 直接將 c 代入 $f(x)$ 得極限, 如

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2}(x^2-2x+3) \\
&\quad = \lim_{x\to 2}x^2 - 2\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}3 \\
&\quad = 2^2-2(2)+3 = 3 \\
&\quad = f(2)
\end{aligned}$$

其中第一個等號成立乃根據極限的運算 (1) 與 (2), 第二個等號成立乃根據極限的性質 (1), (2) 與 (3).

推廣. (1) 設 $p(x)$ 爲一多項式, 則

$$\lim_{x\to c}p(x) = p(c)$$

亦即, 可用代入法求多項式的極限.

(2) 設有理函數

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $q(c) \neq 0$, 則根據極限的運算 (4) 以及推廣 (1), 得

$$\lim_{x\to c} r(x) = \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = r(c)$$

亦即, 當有理函數的分母在 $x = c$ 不等於 0 時, 可用代入法求有理函數在 $x = c$ 的極限.

註. 其它可用代入法求極限的函數, 會陸續地介紹.

(2) 消去法 (cancellation technique).

根據如下的替代定理 (replacement theorem), 將共同因式消去而求極限的方法.

替代定理. 令 c 爲一實數且對所有的 $x \neq c$,

$$f(x) = g(x)$$

(即, $f(x)$ 與 $g(x)$ 僅在 $x = c$ 不同). 若

$$\lim_{x\to c} g(x)$$

存在, 則 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限亦存在且

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

亦即, 求 $f(x)$ 在 $x=c$ 的極限時, 可以用 $g(x)$ 替代.

爲何成立? 因爲在 $x=c$ 的極限是考慮函數在 $x=c$ 附近的行爲變化, 而根據假設, 此二函數在 $x=c$ 以外均相等, 自然它們的行爲就一樣, 因此有相同的極限.

以例說明消去法如下.

例 3. 試求

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

<解> (1) 代入法: 代 $x=1$, 得

$$\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

不是一實數, 稱作未定型 (indeterminate form). 因此, 代入法不適用.

(2) 消去法: 未定型 $\frac{0}{0}$ 表示分子, 分母均有 $x-1$ 的因式, 故經由分解與消去, 得

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x-1} &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\\ &= x^2+x+1,\ x\neq 1\end{aligned}$$

因此, 由替代定理,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)\\ &= 1^2+1+1=3\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因爲 x^2+x+1 爲一多項式, 故可用代入法求極限, 圖示如下.

例 4. 試求

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$$

<解> (1) 代入法: 代 $x=-3$, 得

$$\frac{(-3)^2+(-3)-6}{(-3)+3}=\frac{9-3-6}{-3+3}=\frac{0}{0}$$

乃一未定型, 故代入法不適用.

(2) 消去法: 未定型 $\frac{0}{0}$ 表示分子, 分母有共同的因式 $x+3$, 故經由分解與消去, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3} &= \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}\\ &= \lim_{x\to -3}(x-2)\\ &= -3-2=-5\end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據替代定理, 第三個等號成立乃因爲 $x-2$ 爲一多項式, 而以代入法求極限所致, 如圖示.

例 5. 試求

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

<解> 先嘗試代入法, 代 $x=-2$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x-2} &= \frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)-2}\\ &= \frac{4-2-2}{-2-2}=\frac{0}{-4}=0\end{aligned}$$

乃一實數. 因此, 代入法適用且

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x-2}=0$$

例 6. 試求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

<解> 代 $x=0$, 得

$$\frac{\sqrt{4}-2}{0}=\frac{0}{0}$$

乃一未定型, 故代入法不適用.

消去法: 因爲原式含有根號, 故不易如前面的例子可以用分解的方式找出共同的因式, 但可用有理化法分解出共同的因式並消去, 亦即,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\\ &= \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+4}+2},\ x\neq 0\end{aligned}$$

最後, 根據替代定理,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

五. 單邊極限 (one-sided limits)

數學式

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

表示 x 由左邊靠近 c 時的極限, 如圖示.

數學式

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

表示 x 由右邊靠近 c 時的極限, 如圖示.

結論: 在 $x = c$ 的雙邊極限

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

乃相當於

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

亦即, 在 $x = c$ 的兩個單邊極限均存在且等於雙邊極限, 此乃因爲雙邊極限是要求函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的兩邊行爲均任意地靠近 L, 因而僅從單邊而言, 兩個單邊的行爲自然必須任意地靠近 L, 故有此結論.

例 7. 令函數

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 1 \\ 4x - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

試求

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

<解> 當函數需以兩個 (含) 以上的數學式子表示時, 稱作複合函數 (compound function), 故 $f(x)$ 爲一複合函數, 此時不方便同時以多個式子表示 $f(x)$, 而求出極限, 故可先求單邊極限再求 (雙邊) 極限, 如下述. 首先, 當 x 由左邊接近 1 時, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (4 - x) \\ &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

其中第一個等號成立乃因爲當 x 由左邊接近 1 時, 表示 $x < 1$, 而根據 $f(x)$ 的定義,

$$f(x) = 4 - x$$

第二個等號成立乃因爲求多項式 $4 - x$ 的雙邊極限時, 可以代入法求之, 而單邊極限只是雙邊極限的一部份, 故自然可用代入法將 1 (不是 1^-) 代入求極限.

同理, 當 x 由右邊接近 1 時, $x > 1$, 故根據 $f(x)$ 的定義, 得

$$f(x) = 4x - x^2$$

以及

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (4x - x^2) \\ &= 4(1) - (1)^2 = 3 \end{aligned}$$

最後, 因爲此二單邊極限均存在且相等, 故雙邊極限

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

例 7. 試求

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$$

<解> 因爲原式含有絕對值 $|2x|$, 故在 0 的兩邊有不同的數學表示式, 而爲一複合函數, 需先求單邊極限, 再決定 (雙邊) 極限. 首先, 當 x 由左邊接近 0 時, $x < 0$, 故

$$|2x| = -2x$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} (-2) = -2 \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲常數的雙邊極限就是常數自己, 自然常數的單邊極限也是常數本身所致.

同理, 當 x 由右邊接近 0 時, $x > 0$, 故

$$|2x| = 2x$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{|2x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 2 = 2\end{aligned}$$

最後, 因爲兩個單邊極限不相等, 故雙邊極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x|}{x}$$

不存在.

註. 函數在 $x = c$ 的兩邊的行爲不一致時, 此函數在 $x = c$ 的極限不存在.

六. 無界行爲 (unbounded behavior)

另一個造成函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限不存在的原因.

舉例, 試問

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}$$

是否存在?

首先, 考慮左單邊極限, 亦即 x 由左邊接近 2 時, 故 $x<2$ 且 x 可任意地接近 2, 因而

$$x-2\to 0$$

但爲負, 以

$$0^-$$

表示之, 亦即爲一任意靠近 0 的負數, 並得出左單邊極限

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

同理, 當 x 由右邊接近 2 時, $x>2$ 且

$$x-2\to 0$$

但爲正, 以

$$0^+$$

表示之, 爲一任意靠近 0 的正數, 因而右單邊極限

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

因此, 二單邊極限均不存在. 故,

$$\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}$$

不存在且原因爲, 當 $x\to 2^-$ 時, $f(x)$ 乃無界地遞減到 $-\infty$; 當 $x\to 2^+$ 時, $f(x)$ 乃無界地遞增到 $+\infty$, 如圖示.

練習題 1. 試求

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{2-x}$$

練習題 2. 試求

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2+x}{x^2-9}$$

練習題 3. 試求

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$