單元 50: 二重積分與平面上的面積
(課本 §7.8)

設雙變數函數 $f(x,y)$ 對 x 的偏導函數為

$$f_x(x,y) = 2xy$$

問 $f(x,y)$ 為何?

答. 根據微分與積分的互逆性, 以及計算對 x 的偏導函數時, 需要將 y 固定, 視為常數, 僅運用微分法則, 對 x 微分, 故在逆運算中, 計算對 x 的不定積分時, 亦需將 y 固定, 視為常數, 僅運用積分法則, 對 x 積分, 得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int f_x(x,y)dx \\ &= \int 2xydx \\ &= 2y\int xdx \\ &= 2y \cdot \frac{1}{2}x^2 + C(y) \\ &= x^2y + C(y) \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃因為對 x 積分時, 視 y 為常數, 故可提出, 且第四個等號中的 $C(y)$ 為對 x 積分的積分常數, 內含 y 的式子, 不限於一般的實數, 而是對一個變

數 x 而言, 爲更廣義的常數, 因爲將 $C(y)$ 對 x 作偏微分時, 由於雖含 y 的式子, 不是一般的實數, 但不含有任何的 x, 故依然視爲常數, 而得出 0.

驗證. 將上式對 x 微分, 並視 y 爲常數, 得

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^2y + C(y)] = 2xy + 0 = f_x(x, y)$$

原式成立, 故 $f(x, y)$ 確實爲

$$x^2y + C(y)$$

定義. 這種只對一個變數的積分, 稱爲偏積分 (partial integration).

問. 如何求定積分?

答. 舉例, 對 x 的定積分

$$\int_1^{2y} 2xy dx$$

爲何? 其中上積分極限爲一含 y 的式子, 此乃合理的, 因爲對 x 積分時, 視 y 爲常數, 而不是只有實數才視爲常數.

因爲微分與積分的互逆性, 以及對 x 求偏導函數時, 僅運用微分法則對 x 微分, 故根據微積分基本定理, 先求出對 x 的偏積分, 再將上下積分極限代入積分變數 x 內, 並求其差, 得

$$
\begin{aligned}
\int_1^{2y} 2xy\,dx &= x^2y + C(y)\Big|_{x=1}^{2y} \\
&= [(2y)^2y + C(y)] \\
&\qquad\qquad -[(1)^2y + C(y)] \\
&= 4y^3 - y
\end{aligned}
$$

註. 由上例知, 積分常數在求定積分時, 可忽略, 如同單變數函數的定積分.

例 1. 試求下列各項偏積分.

(a) $\displaystyle\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)dy$

(b) $\displaystyle\int_y^{5y} \sqrt{x-y}\,dx$

<解> (a) 爲一對 y 的偏積分, 故根據微積分基本定理, 視 x 爲常數, 僅對 y 積分, 並在忽略對 y 的積分常數,

一含 x 的式子 $C(x)$ 下, 將積分的上下極限代入積分變數 y 內, 並求其差, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= (2x^2)\left(-\frac{1}{y}\right) + y^2\Big|_{y=1}^{x} \\
&= \left(-\frac{2x^2}{x} + x^2\right) - (-2x^2 + 1) \\
&= 3x^2 - 2x - 1
\end{aligned}$$

(b) 此乃一對 x 的偏積分, 故根據微積分基本定理, 視 y 爲常數, 僅對 x 積分, 同時在忽略對 x 的積分常數, 一含 y 的式子 $C(y)$ 下, 將積分的上下極限代入積分變數 x 內, 並求其差, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_y^{5y} (x-y)^{1/2}\,dx \\
&= \frac{2}{3}(x-y)^{3/2}\Big|_{x=y}^{5y} \\
&= \frac{2}{3}(4y)^{3/2} - \frac{2}{3}(0)^{3/2} \\
&= \frac{16}{3}y^{3/2}
\end{aligned}$$

註. 由上例知, 偏積分在代入積分的上下極限後, 爲一原先視爲常數的變數的函數, 如對 x 的偏積分, 得一 y 的

函數; 對 y 的偏積分, 得一 x 的函數. 因此, 可考慮再對這些函數積分, 定義如下.

定義. 積分的積分稱爲二重積分 (double integral), 有下述的二種型式.

(1) 先對 y 積分, 再對 x 積分的二重積分:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

積分變數爲 $dydx$, 由內往外依次積分, 內部的積分上下極限爲 x 的函數 (對 y 的積分而言, 是常數), 計算出對 y 的定積分後, 得一單變數 x 的函數, 再對 x 求定積分, 此時的積分上下極限爲二實數, 故最後的定積分爲一實數.

(2) 先對 x 積分, 再對 y 積分的二重積分:

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

積分變數爲 $dxdy$, 由內往外依次積分, 內部的積分上下極限爲 y 的函數 (對 x 的積分而言, 是常數), 計算出對 x 的定積分後, 得一單變數 y 的函數, 再對 y 求定積分, 此時的積分上下極限爲二實數, 故最後的定積分爲一實數.

例 2. 試求二重積分

$$\int_0^4 \int_0^x \frac{2}{(x+1)(y+1)} dydx$$

<解> 根據積分變數的型式 $dydx$, 這是一個先對 y, 再對 x 積分的二重積分, 故根據積分的對數法則, 並將對 y 的積分的上下極限, 乃 x 的函數, 代入積分變數 y 後, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^4 \left[\int_0^x \frac{2}{(x+1)(y+1)} dy\right] dx \\
&= \int_0^4 \left[\frac{2}{x+1} \ln(y+1)\right]_{y=0}^{x} dx \\
&= \int_0^4 \frac{2}{x+1} [\ln(x+1) - \ln 1] dx \\
&= \int_0^4 \frac{2\ln(x+1)}{x+1} dx
\end{aligned}$$

乃一單變數 x 的定積分.

接著, 根據取

$$u = \ln(x+1),\ du = \frac{1}{x+1}dx$$

的代入法, 以及冪次法則, 由上式得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^4 2\underbrace{\ln(x+1)}_{u}\underbrace{\frac{1}{x+1}dx}_{du} \\
&= [\ln(x+1)]^2\Big|_{x=0}^4 \\
&= (\ln 5)^2 - (\ln 1)^2 = (\ln 5)^2
\end{aligned}$$

乃一實數.

應用. 求平面區域的面積

設區域 R 爲

$$a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

乃一個以垂直方向描述的區域, 如圖示.

首先, 根據過去的經驗, 在一區間上界於二函數間的區域的面積公式, 得

$$\begin{aligned}
R \text{ 的面積} &= \int_a^b [\text{上函數} - \text{下函數}]dx \\
&= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx
\end{aligned}$$

又根據前述二重積分的定義, 被積函數爲 1 且積分次序爲 $dydx$ 的二重積分

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx &= \int_a^b \left[y \Big|_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \right] dx \\ &= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx\end{aligned}$$

因此, 比較上述二式, 得

$$R \text{ 的面積} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

且由 R 的描述式子 (垂直方向) 即可列出對應的二重積分 (次序爲 $dydx$).

同理, 若區域

$$R : \begin{cases} c \le y \le d, \\ h_1(y) \le x \le h_2(y) \end{cases}$$

亦即, 一個以水平方向描述的區域, 如圖示.

首先, 根據水平長方條方式求面積的公式, 以及圖示, 得

$$\begin{aligned}R \text{ 的面積} &= \int_c^d [\text{右函數} - \text{左函數}] dy \\ &= \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)] dy\end{aligned}$$

又被積函數爲 1 且積分次序爲 $dxdy$ 的二重積分

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy &= \int_c^d \left[x \Big|_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} \right] dy \\ &= \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)] dy\end{aligned}$$

故, 比較上二式, 得

$$R \text{ 的面積} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy$$

且由 R 的描述式子 (水平方向) 即可列出對應的二重積分 (次序爲 $dxdy$).

註 1. 區域 R 的描述方式與對應的二重積分次序一定要一致, 亦即, 垂直方向描述時, 積分次序爲 $dydx$; 水平方向描述時, 積分次序爲 $dxdy$.

註 2. 若不明確指定積分次序時, 則區域 R 的面積可表示成

$$\iint_R dA$$

例 3. 試求 $y = x^2$ 與 $y = x^3$ 所圍出區域的面積.

<解> (1) 繪出區域 R, 以便正確地描述 R. 根據過去的經驗, 首先求交點, 得區域的範圍, 亦即, 令

$$x^2 = x^3$$

亦相當於

$$x^2(x-1) = 0$$

由此得

$$x = 0, 1$$

故

$$0 \le x \le 1 \tag{1}$$

接著, 對 x 範圍內固定的 x, 決定 y 的範圍, 亦即, 上下函數, 一個方式是, 取 $x = \frac{1}{2}$, 代入 2 個 y, 得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

故

$$x^3 \le y \le x^2 \tag{2}$$

因此, 根據 (1) 式與 (2) 式, 以垂直方向描述, 得區域

$$R : \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x^3 \le y \le x^2 \end{cases}$$

如圖示.

(2) 求 R 的面積. 根據 R 的描述方式, 一個垂直方向的描述, 以及對應的積分次序 $dydx$, 得

$$\begin{aligned}
R \text{ 的面積} &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dydx \\
&= \int_0^1 \left(y\Big|_{y=x^3}^{x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

例 4. 給定一個二重積分

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dxdy$$

(a) 試繪出此二重積分所表示的區域 R.

(b) 試以另一個積分次序表示 R 的面積.

(c) 試證明此二種表示法應得相同的面積.

<解> (a) 根據給定的二重積分的次序 $dxdy$, 得 y 的範圍為

$$0 \leq y \leq 2$$

且對於 y 範圍內固定的 y, x 的範圍為

$$y^2 \leq x \leq 4$$

故得一水平方式描述的區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

如圖示.

(b) 根據圖示, 亦可以形成垂直長方條, 由 $x = 0$ 開始, 直至 $x = 4$, 故得 x 的範圍為

$$0 \leq x \leq 4$$

且對於每一個固定的 x, 此長方條的範圍由 $y = 0$ 開始, 直至曲線 $x = y^2, y \geq 0$ 上的 y 值, 經由兩邊同取根號, 亦相當於 $y = \sqrt{x}$, 故得 y 的範圍為

$$0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

因此, 以垂直方式描述, 得區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

並由此得

$$R \text{ 的面積} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx$$

一個由垂直方向描述所對應的積分次序爲 $dydx$ 的二重積分, 與給定的二重積分在積分區域的極限及次序上均不同, 務需確實地確認此二種不同的描述方式, 這是關鍵的.

(c) 首先, 由給定的二重積分, 先對 x 積分, 再對 y 積分, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_0^2 \int_{y^2}^4 dxdy \\ &= \int_0^2 (4-y^2)dy \\ &= \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

接著, 根據 (b) 中的二重積分, 先對 y 積分, 再對 x 積分, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx \\ &= \int_0^4 \sqrt{x}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 \\ &= \frac{2}{3}(4)^{3/2} = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

一致的結果, 且必須一致, 因爲是計算同一個區域的面積.

註. 此例暗示可經由適當的積分次序的改變, 求出原來積分次序下不易計算的二重積分, 如例 5.

例 5. 試求二重積分

$$\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2} dxdy$$

<解> 首先, 確認原二重積分的積分極限與積分次序是一致的, 亦即, 先對 x 積分, 積分的上下極限爲二個 y 的函數; 再對 y 積分, 積分的上下極限爲二實數. 但先對 x 積分時, 被積函數 e^{x^2} 缺少代入法所需的 $2x$, 故直接積分, 亦即, 積分次序爲 $dxdy$ 時, 不可能. 故, 需將積分次序改成 $dydx$, 亦即, 要以不同的方式重新描述 R, 如下述.

根據原式, 是以水平方向描述 R, 得

$$R : \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ y \le x \le 3 \end{cases}$$

如圖示. 而此區域亦可以垂直方向描述, 得垂直長方條由 $x = 0$ 開始, 至 $x = 3$, 故 x 的範圍爲

$$0 \le x \le 3$$

且對於每一個固定的 x, 此長方條的範圍由 $y=0$ 開始, 直至直線 $x=y$ 上的 y 值, 亦相當於 $y=x$, 故 y 的範圍為

$$0 \leq y \leq x$$

合併上述二式, 以垂直方向描述, 得區域

$$R:\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

因此, 根據對應的積分次序 $dydx$, 得

$$\text{原式} = \int_0^3 \int_0^x e^{x^2} dydx$$

雖然被積函數 e^{x^2} 未變, 但是在改成先對 y 積分後, 只含 x 的被積函數可被視為常數, 使得先對 y 的積分是可行的, 並在代入積分的上下極限後, 由上式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^3 e^{x^2} \cdot y \Big|_{y=0}^{x} dx \\ &= \int_0^3 x e^{x^2} dx \end{aligned}$$

乃一單變數的定積分. 又此時原本以代入法對 x 積分時所缺少的 x 亦出現了, 故根據取

$$u = x^2,\ du = 2xdx$$

的代入法, 由上式得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int_0^3 \underbrace{e^{x^2}}_{e^u} \cdot \underbrace{2x dx}_{du} \\
&= \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$