單元 46: 偏導函數
(課本 §7.4)

一. 定義

令雙變數函數 $z = f(x, y)$, 則

(1) 對 x 的一階偏導函數

$$\frac{\partial z}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

亦即, 在 x 改變, 且固定 y, 視爲常數下, z 對 x 的瞬間變化率.

(2) 對 y 的一階偏導函數

$$\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

亦即, 在 y 改變, 且固定 x, 視爲常數下, z 對 y 的瞬間變化率.

二. 符號

慣用的偏導函數符號爲

(1) z 對 x 的一階偏導函數爲

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)]$$

(2) z 對 y 的一階偏導函數爲

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)]$$

(3) 在 (a, b) 的值爲

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a, b)$$

以及

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

三. 圖形上的意義

類似於單變數的導函數，偏導函數亦含有切線斜率的意義，如下述.

(1) 對 x 的偏導函數

$$f_x(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

乃表示將 $y = y_0$ 固定, 並在 $z = f(x, y)$ 的圖形與鉛垂平面 $y = y_0$ 所交集出的曲面截線上, 求割線斜率的極限, 如圖示. 因此, 在幾何意義上, 對 x 的偏導函數 $f_x(x, y_0)$ 乃表示過點 $(x, y_0, f(x, y_0))$, 在 x-方向的切線斜率.

(2) 根據定義, 對 y 的偏導函數

$$f_y(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}$$

乃表示將 $x = x_0$ 固定, 並在 $z = f(x, y)$ 的圖形與鉛垂平面 $x = x_0$ 所交集出的曲面截線上, 求割線斜率的極限, 如圖示. 因此, 在幾何意義上, 對 y 的偏導函數 $f_y(x_0, y)$ 乃表示過點 $(x_0, y, f(x_0, y))$, 在 y-方向的切線斜率.

例 3. 試求

$$f(x, y) = xe^{x^2 y} + \ln(2x + y)$$

的一階偏導函數, 並求在點 $(1, \ln 2)$ 的值.

<解> (a) 視 y 爲常數, 對 x 微分, 並根據微分的乘積法則, 指數函數與對數函數的微分公式, 得 f 對 x 的一階偏導函數

$$\begin{aligned}
& f_x(x,y) \\
= \;& x\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x^2y}\right] + e^{x^2y}\frac{\partial}{\partial x}[x] + \frac{\partial}{\partial x}[\ln(2x+y)] \\
= \;& x\cdot e^{x^2y}\cdot 2xy + e^{x^2y}\cdot 1 + \frac{1}{2x+y}\cdot 2 \\
= \;& (2x^2y+1)e^{x^2y} + \frac{2}{2x+y}
\end{aligned}$$

(b) 視 x 爲常數, 對 y 微分, 並根據指數函數與對數函數的微分公式, 得 f 對 y 的一階偏導函數

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= x\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x^2y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}[\ln(2x+y)] \\
&= x\cdot e^{x^2y}\cdot x^2 + \frac{1}{2x+y}\cdot 1 \\
&= x^3e^{x^2y} + \frac{1}{2x+y}
\end{aligned}$$

(c) 將 $(1,\ln 2)$ 分別代入上述求得的兩個偏導函數, 得

$$\begin{aligned}
f_x(1,\ln 2) &= (2\ln 2+1)e^{\ln 2} + \frac{2}{2+\ln 2} \\
&= 2(2\ln 2+1) + \frac{2}{2+\ln 2}
\end{aligned}$$

以及

$$f_y(1, \ln 2) = e^{\ln 2} + \frac{1}{2 + \ln 2} = 2 + \frac{1}{2 + \ln 2}$$

例 2. 試求曲面

$$z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

上, 過點 $(1/2, 1, 2)$, 在 x-方向與 y-方向的斜率.

<解> 根據偏導函數的幾何意義, 過點 $(1/2, 1, 2)$, 在 x-方向與 y-方向的斜率分別爲一階偏導函數在 $(1/2, 1)$ 的值. 首先, 視 y 爲常數, 對 x 微分, 得

$$f_x(x, y) = -x$$

故, 在 x-方向的斜率爲

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -x\Big|_{(1/2,1)} = -\frac{1}{2}$$

接著, 視 x 爲常數, 對 y 微分, 得

$$f_y(x, y) = -2y$$

故, 在 y-方向的斜率爲

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2y\Big|_{(1/2,1)} = -2$$

例 3. 令產品 1 的銷售量爲 x_1, 售價爲 p_1, 且產品 2 的銷售量爲 x_2, 售價爲 p_2, 稱此二產品爲

(1) 互補型產品 (complementary products), 若 $x_1\uparrow$ 乃相當於 $x_2\uparrow$, 或 $x_2\downarrow$ 乃相當於 $x_1\downarrow$, 如錄影機與錄影帶.

(2) 替代型產品 (substitute products), 若 $x_1\uparrow$ 乃相當於 $x_2\downarrow$, 或 $x_2\uparrow$ 乃相當於 $x_1\downarrow$, 如錄影機與光碟機.

設

$$x_1 = 150 - 2p_1 - \frac{5}{2}p_2$$

且

$$x_2 = 350 - \frac{3}{2}p_1 - 3p_2$$

試判斷此二產品的關係, 亦即, 爲互補型產品或替代型產品.

<解> 將 p_1 固定, 對 p_2 微分, 得產品 1 的銷售量 x_1 對產品 2 的售價 p_2 的變化率

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = -\frac{5}{2} < 0$$

接著, 根據變化率的意義, 由此導出, 當 $p_2 \uparrow$ 時, $x_1 \downarrow$. 又根據常識, 當 $p_2 \uparrow$ 時, 亦會導致 $x_2 \downarrow$. 因此, 得

$$x_1 \downarrow \Leftrightarrow \ x_2 \downarrow$$

亦即, 互爲互補型產品.

或將 p_2 固定, 對 p_1 微分, 得產品 2 的銷售量 x_2 對產品 1 的售價 p_1 的變化率

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{3}{2} < 0$$

並由此導出, 當 $p_1 \uparrow$ 時, $x_2 \downarrow$. 又當 $p_1 \uparrow$ 時, 亦會導致 $x_1 \downarrow$. 因此, 得

$$x_2 \downarrow \Leftrightarrow \ x_1 \downarrow$$

故, 此二產品爲互補型產品.

四. 多變數函數的一階偏導函數

令三變數函數 $w = f(x, y, z)$, 則 w 對 x 的一階偏導函數

$$\frac{\partial w}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

亦即, 在 x 改變, 固定 y 與 z, 視爲常數下, w 對 x 的瞬間變化率.

同理, 可定義 w 對 y 的一階偏導函數

$$\frac{\partial w}{\partial y} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

亦即, 在 y 改變, 固定 x 與 z, 視爲常數下, w 對 y 的瞬間變化率, 以及 w 對 z 的一階偏導函數

$$\frac{\partial w}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

亦即, 在 z 改變, 固定 x 與 y, 視爲常數下, w 對 z 的瞬間變化率.

同理, 亦可定義三個變數以上的多變數函數的一階偏導函數.

例 4. 試求

$$w = xe^{xy+2z}$$

的一階偏導函數.

<解> 對 x 微分, 視 y 與 z 爲常數, 並根據微分的乘積法則以及指數函數的微分公式, 得 w 對 x 的一階偏導函數

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{xy+2z}\right] + e^{xy+2z} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[x] \\ &= x \cdot e^{xy+2z} \cdot y + e^{xy+2z} \cdot 1 \\ &= (xy+1)e^{xy+2z} \end{aligned}$$

接著, 對 y 微分, 視 x 與 z 爲常數, 並根據指數函數的微分公式, 得 w 對 y 的一階偏導函數

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{xy+2z}\right] \\ &= x \cdot e^{xy+2z} \cdot x = x^2 e^{xy+2z}\end{aligned}$$

最後, 對 z 微分, 視 x 與 y 爲常數, 並根據指數函數的微分公式, 得 w 對 z 的一階偏導函數

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= x \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{xy+2z}\right] \\ &= x \cdot e^{xy+2z} \cdot 2 = 2xe^{xy+2z}\end{aligned}$$

五. 高階偏導函數

設 $z = f(x, y)$, 則雙變數函數 $f(x, y)$ 的二階偏導函數定義爲一階偏導函數分別再對 x 與 y 求一階偏導函數, 亦即, f 對 x 與 x 的二階偏導函數爲

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \overset{\text{記成}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{\text{或}}{=} f_{xx}$$

以及 f 對 x 與 y 的二階偏導函數爲

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \overset{\text{記成}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{\text{或}}{=} f_{xy}$$

同理, f 對 y 與 x 的二階偏導函數為

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \overset{\text{記成}}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{\text{或}}{=\!=} f_{yx}$$

以及 f 對 y 與 y 的二階偏導函數為

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \overset{\text{記成}}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{\text{或}}{=\!=} f_{yy}$$

同理, 可定義三階, 四階, ... 等高階的偏導函數.

註. 二階偏導函數的符號所代表的微分次序, 乃是由最靠近 f 的變數開始, 逐次地微分.

例 5. 試求

$$f(x,y,z) = ye^x + x \ln z$$

的二階偏導函數.

<解> 根據二階偏導函數的定義, 需先求出一階偏導函數, 再對一階偏導函數微分, 才可得出二階偏導函數. 故, 首先對 x 微分, 視 y 與 z 為常數, 並根據指數函數與對數函數的微分公式, 得

$$f_x = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}[e^x] + \ln z \cdot \frac{\partial}{\partial x}[x] = ye^x + \ln z$$

同理, 對 y 微分, 視 x 與 z 爲常數, 得

$$f_y = e^x \cdot \frac{\partial}{\partial y}[y] + x \ln z \cdot \frac{\partial}{\partial y}[1] = e^x$$

且對 z 微分, 視 x 與 y 爲常數, 並根據對數函數的微分公式, 得

$$f_z = ye^x \cdot \frac{\partial}{\partial z}[1] + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}[\ln z] = \frac{x}{z}$$

接著, 將 f_x 再分別對 x, y, 與 z 微分, 得二階偏導函數

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}[ye^x + \ln z] = ye^x$$

且

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}[ye^x + \ln z] = e^x$$

以及

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}[ye^x + \ln z] = \frac{1}{z}$$

同理, 將 f_y 分別對 x, y, 與 z 微分, 得二階偏導函數

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}[e^x] = e^x$$

且

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}[e^x] = 0$$

以及

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}[e^x] = 0$$

最後, 將 f_z 分別對 x, y, 與 z 微分, 得二階偏導函數

$$f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{z}\right] = \frac{1}{z}$$

且

$$f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{z}\right] = 0$$

以及

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x}{z}\right] = -\frac{x}{z^2}$$

因此, 共得 $3^2 = 9$ 個二階偏導函數.