

## 單元 44: 空間中的曲面

(課本 §7.2)

僅探討兩類空間中的曲面.

### 一. 平面

空間中的平面乃  $x$ ,  $y$ , 與  $z$  的一次方程式

$$ax + by + cz = d$$

其中  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , 與  $d$  不全為 0.

例 1. 試繪

(a)  $3x + 2y + 4z = 12$

(b)  $2x + 5y = 10$

(c)  $3x = 12$

的圖形.

<解> (a) 代  $y = z = 0$ , 得  $x$ -截距

$$(4, 0, 0)$$

代  $x = z = 0$ , 得  $y$ -截距

$$(0, 6, 0)$$

代  $x = y = 0$ , 得  $z$ -截距

$$(0, 0, 3)$$

代  $z = 0$ , 得  $xy$ -曲面截線

$$3x + 2y = 12$$

代  $y = 0$ , 得  $xz$ -曲面截線

$$3x + 4z = 12$$

代  $x = 0$ , 得  $yz$ -曲面截線

$$2y + 4z = 12$$

繪出上述求得的截距與曲面截線, 得平面在第一卦限內的圖形, 如圖示.

(b) 代  $y = z = 0$ , 得  $x$ -截距

$$(5, 0, 0)$$

代  $x = z = 0$ , 得  $y$ -截距

$$(0, 2, 0)$$

無  $z$ -截距, 因為代  $x = y = 0$ , 得  $0 = 10$ , 一矛盾現象.

代  $z = 0$ , 得  $xy$ -曲面截線

$$2x + 5y = 10$$

代  $y = 0$ , 得  $xz$ -曲面截線

$$x = 5$$

代  $x = 0$ , 得  $yz$ -曲面截線

$$y = 2$$

繪出上述求得的截距與曲面截線, 得平面在第一卦限內的圖形, 如圖示.

另一觀點為, 因為原式中  $z$  未出現, 可視原式為

$$2x + 5y + 0z = 12$$

表示  $z$  可為任意值, 故圖形乃相當於將  $xy$ -曲面截線 (與平面  $z = 0$  的交集) 沿著  $z$ -軸, 上下延伸 (與其他任意  $z$  值所對應的平面的交集), 所得出的圖形.

(c) 僅有  $x$ -截距

$$(4, 0, 0)$$

以及  $xy$ -曲面截線

$$x = 4$$

與  $xz$ -曲面截線

$$x = 4$$

故根據繪出的截距與曲面截線，得平面在第一卦限內的圖形，如圖示。

另一觀點為，由於  $y$  與  $z$  未出現在原式，乃表示  $y$  與  $z$  可為任意值，但  $x$  需恆為 4，故圖形乃相當於在  $x$ -截距  $(4, 0, 0)$  與  $yz$ -平面保持 4 個單位下，向任何方向延伸後的圖形，亦相當於與  $yz$ -平面平行且距離為 4 的平面。

## 二. 二次曲面 (quadric surface)

滿足二次方程式

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

的點集合，稱作二次曲面。可分類成下述六種基本的二次曲面。

## (1) 橢圓錐面 (elliptic cone)

橢圓錐面的標準式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

其特徵為

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代  $z = k$  (常數), 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與平面  $z = k$  的交集為一橢圓. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的橢圓; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $xy$ -曲面截線為一退化的單點  $(0, 0, 0)$ .

(ii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為將  $y = k$  代入, 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式且  $z^2$  的係數為正, 故與平面  $y = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $xz$ -曲面截線為退化的二直線  $\frac{z}{c} = \pm \frac{x}{a}$ .

(iii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為代入常數  $x = k$ , 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式且  $z^2$  的係數為正, 故與平面  $x = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $xz$ -曲面截線為退化的二直線  $\frac{z}{c} = \pm \frac{y}{b}$ .

(iv) 軸心:  $z$ -軸, 係數為負的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

## (2) 橢圓拋物面 (elliptic paraboloid)

橢圓拋物面的標準式為

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

其特徵為

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代入常數  $z = k > 0$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$$

乃一橢圓方程式，故與上半空間中的平面  $z = k$  的交集爲一橢圓。不同的  $k$ ，對應出互爲平行，不同的橢圓；且當  $k = 0$  時，所得的  $xy$ -曲面截線爲一退化的單點  $(0, 0, 0)$ 。

(ii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線：拋物線，因爲代入常數  $x = k$ ，得

$$z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}$$

乃一拋物線方程式，且  $y^2$  項的係數爲正，故與鉛垂平面  $x = k$  的交集爲一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線。不同的  $k$ ，對應出互爲平行，不同的拋物線；且當  $k = 0$  時，所得的  $yz$ -曲面截線爲一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線  $z = \frac{y^2}{b^2}$ 。

(iii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線：拋物線，因爲代入常數  $y = k$ ，得

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$$

乃一拋物線方程式，且  $x^2$  項的係數爲正，故與鉛垂平面  $y = k$  的交集爲一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線。不同的  $k$ ，對應出互爲平行，不同的拋物線；且當  $k = 0$  時，所得的  $xz$ -曲面截線爲一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線  $z = \frac{x^2}{a^2}$ 。

(iv) 軸心： $z$ -軸，一階的變數。

根據上述的特徵，可繪出對應的圖形，如圖示。

### (3) 雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid)

雙曲拋物面的標準式為

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

其特徵為

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線：雙曲線，因為代入常數  $z = k > 0$ ，得

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = k$$

乃一雙曲線方程式且  $y^2$  的係數為正，故在上半空間中與平面  $z = k$  的交集為一開口朝向  $y$ -軸的雙曲線；不同的  $k$ ，對應出互為平行，不同的雙曲線。代入  $z = k < 0$ ，得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -k$$

乃一雙曲線方程式且  $x^2$  的係數為正，故在下半空間中與平面  $z = k$  的交集為一開口朝向  $x$ -軸的雙曲線；不同的  $k$ ，對應出互為平行，不同的雙曲線。代  $z = 0$  時，得  $xy$ -曲面截線為二退化的直線  $\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$ 。



(ii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線: 拋物線, 因為代入常數  $y = k$ , 得

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$$

乃一拋物線方程式, 且  $x^2$  項的係數為負, 故與鉛垂平面  $y = k$  的交集為一開口朝向負  $z$ -軸的拋物線. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的拋物線; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $xz$ -曲面截線為一開口朝向負  $z$ -軸的拋物線  $z = -\frac{x^2}{a^2}$ .

(iii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線: 拋物線, 因為代入常數  $x = k$ , 得

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{a^2}$$

乃一拋物線方程式, 且  $y^2$  項的係數為正, 故與鉛垂平面  $x = k$  的交集為一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的拋物線; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $yz$ -曲面截線為一開口朝向正  $z$ -軸的拋物線  $z = \frac{y^2}{b^2}$ .

(iv) 軸心:  $z$ -軸, 一階的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 形如馬鞍, 如圖示.

#### (4) 橢圓球面 (ellipsoid)

橢圓球面的標準式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

其特徵為

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代入常數  $z = k$ ,  $-c \leq k \leq c$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面  $z = k$  的交集為一橢圓. 當  $-c < k < c$  時, 得互為平行, 不同的橢圓. 當常數  $k = \pm c$  時, 分別為退化的單點  $(0, 0, \pm c)$ ; 當  $k = 0$  時, 所得的  $xy$ -曲面截線為一橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 當  $k < -c$  或  $k > c$  時, 等號右邊為負, 但左邊為非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(ii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代入常數  $y = k$ ,  $-b \leq k \leq b$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與鉛垂平面  $y = k$  的交集為一橢圓. 當  $-b < k < b$  時, 得互為平行, 不同的橢圓. 當常數  $k = \pm b$  時, 分別為退化的單點  $(0, \pm b, 0)$ ; 當  $k = 0$

時, 所得的  $xy$ -曲面截線爲一橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 當  $k < -b$  或  $k > b$  時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(iii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因爲代入常數  $x = k$ ,  $-a \leq k \leq a$ , 得

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與鉛垂平面  $x = k$  的交集爲一橢圓. 當  $-a < k < a$  時, 得互爲平行, 不同的橢圓. 當常數  $k = \pm a$  時, 分別爲退化的單點  $(\pm a, 0, 0)$ ; 當  $k = 0$  時, 所得的  $yz$ -曲面截線爲一橢圓  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 當  $k < -a$  或  $k > a$  時, 等號右邊爲負, 但左邊爲非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

## (5) 單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet)

單葉雙曲面的標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

其特徵爲

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代入常數  $z = k$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面  $z = k$  的交集為一橢圓. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的橢圓; 且當  $k = 0$  時, 所得的  $xy$ -曲面截線為橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

(ii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為代入常數  $y = k$ ,  $-b < k < b$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且  $x^2$  項的係數為正, 故與鉛垂平面  $y = k$  的交集為一開口朝向  $x$ -軸的雙曲線, 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線; 當  $k = 0$  時, 所得的  $xz$ -曲面截線為雙曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 代入常數  $y = k$ ,  $k < -b$  或  $k > b$ , 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1$$

乃一雙曲線方程式, 且  $z^2$  項的係數為正, 故與鉛垂平面  $y = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線, 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線. 代  $y = \pm b$ , 得曲面截線為二退化的直線  $\frac{z}{c} = \pm \frac{x}{a}$ .

(iii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為代入常數  $x = k$ ,  $-a < k < a$ , 得

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且  $y^2$  的係數為正, 故與鉛垂平面  $x = k$  的交集為一開口朝向  $y$ -軸的雙曲線, 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線; 當  $k = 0$  時, 所得的  $yz$ -曲面截線為雙曲線  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 代入常數  $x = k$ ,  $k < -a$  或  $k > a$ , 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$$

乃一雙曲線方程式, 且  $z^2$  項的係數為正, 故與鉛垂平面  $x = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線, 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線. 代  $x = \pm a$ , 得曲面截線為二退化的直線  $\frac{z}{c} = \pm \frac{y}{b}$ .

(iv) 軸心:  $z$ -軸, 係數為負的變數.

根據上述的特徵, 可繪出對應的圖形, 如圖示.

## (6) 雙葉雙曲面 (hyperboloid of two sheets)

雙葉雙曲線的標準式為

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其特徵為

(i) 與  $xy$ -平面平行的曲面截線: 橢圓, 因為代入常數  $z = k$ ,  $k < -c$  或  $k > c$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$$

乃一橢圓方程式, 故與水平平面  $z = k$  的交集為一橢圓. 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的橢圓. 代  $z = \pm c$ , 曲面截線分別為退化的單點  $(0, 0, \pm c)$ . 代入  $z = k$ ,  $-c < k < c$  時, 等號右邊為負, 但左邊為非負, 故無任何滿足方程式的點, 沒有曲面截線.

(ii) 與  $xz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為代入常數  $y = k$ , 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

乃一雙曲線方程式, 且  $z^2$  的係數為正, 故與鉛垂平面  $y = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線, 不同的  $k$ , 對應出互為平行, 不同的雙曲線; 當  $k = 0$  時, 所得的  $xz$ -曲面截線為一雙曲線  $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

(iii) 與  $yz$ -平面平行的曲面截線: 雙曲線, 因為代入常數  $x = k$ , 得

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$

乃一雙曲線方程式，且  $z^2$  的係數為正，故與鉛垂平面  $x = k$  的交集為一開口朝向  $z$ -軸的雙曲線，不同的  $k$ ，對應出互為平行，不同的雙曲線；當  $k = 0$  時，所得的  $yz$ -曲面截線為一雙曲線  $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

(iv) 軸心： $z$ -軸，係數為正的變數。

根據上述的特徵，可繪出對應的圖形，如圖示。

註 1. 前面三種二次曲面：橢圓錐面，橢圓拋物面，雙曲拋物面的方程式的特徵為，將變數移至等號左邊後，等號右邊為 0。

註 2. 後面三種二次曲面：橢圓球面，單葉雙曲面，雙葉雙曲面的方程式的特徵為，將變數移至等號左邊後，等號右邊為 1。

註 3. 二種拋物面均有一個一次變數，且橢圓拋物面乃相當於另二個變數的係數同號；雙曲拋物面乃相當於另二個變數的係數不同號。

例 2. 試將下列二次曲面分類並繪其圖。

$$(a) \quad x - y^2 - z^2 = 0$$

$$(b) \quad x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

$$(c) \quad x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$(d) \quad 2x^2 - y^2 + 2z^2 = 8$$

<解> (a) 經由標準化, 得原式相當於

$$x = y^2 + z^2$$

含一次變數  $x$ , 且另二個二次變數的係數同號, 故為一軸心為  $x$ -軸, 頂點為  $(0, 0, 0)$ , 且開口朝向正  $x$ -軸延伸的橢圓拋物面, 如圖示.

(b) 經由標準化, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4} - y^2 - z^2 = 1$$

其中  $x^2$  的係數為正, 且另二個二次變數的係數均為負, 故為一軸心為  $x$ -軸, 頂點為  $(\pm 2, 0, 0)$ , 且開口朝向  $x$ -軸兩端延伸的雙葉雙曲面, 如圖示.



(c) 標準化後, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

乃一橢圓球面, 因為三個二次變數的係數均為正, 如圖示.

(d) 標準化後, 得原式相當於

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$$

其中只有一個二次變數  $y^2$  的係數為負, 且另二個二次變數的係數均為正, 故為一軸心為  $y$ -軸, 且開口朝向  $y$ -軸兩端延伸的單葉雙曲面, 如圖示.