

## 單元 43: 三維坐標系統

### (課本 §7.1)

#### 一. 空間的分割

空間可由三個相互垂直的直線，稱作坐標軸，它們分別為  $x$ -軸， $y$ -軸，與  $z$ -軸，所構成及描述其中任何一點的相對位置  $(x, y, z)$ ，如圖示。

三個坐標平面： $xy$ -平面， $yz$ -平面，與  $xz$ -平面，可將空間分割成八個卦限 (octant)，分別為

第一卦限 ( $x > 0, y > 0, z > 0$ )

第二卦限 ( $x < 0, y > 0, z > 0$ )

⋮

第五卦限 ( $x > 0, y > 0, z < 0$ )

⋮

第八卦限 ( $x > 0, y < 0, z < 0$ )

亦即，在上半空間，逆時針方向依序對應出前四個卦限，以及在下半空間，逆時針方向依序對應出後四個卦限，如圖示。

## 二. 距離公式

二點  $(x_1, y_1, z_1)$  與  $(x_2, y_2, z_2)$  之間的距離

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

## 三. 中點公式

二點  $(x_1, y_1, z_1)$  與  $(x_2, y_2, z_2)$  所連成線段的中點 (midpoint) 為

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

如圖示.

## 四. 球面方程式

以  $(h, k, l)$  為球心,  $r$  為半徑的球面為

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

稱作球面的標準式.

### 例 1. 試求球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

的球心與半徑.

<解> 將常數項 8 移至等號右邊, 並以配方法得球面方程式為

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\= -8 + 1 + 4 + 9\end{aligned}$$

由此導出球面的標準式

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

故, 半徑為  $\sqrt{6}$ , 且球心為  $(1, -2, 3)$ .

## 五. 空間曲面 (surface in space)

空間曲面為滿足  $x, y, z$  方程式的點集合, 如

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

為一空間曲面, 又可更具體地稱其為以  $(h, k, l)$  為球心, 半徑為  $r$  的球面.

## 六. 曲面截線 (trace of surface)

曲面截線為曲面與空間中的平面的交集, 如  $xy$ -曲面截線為曲面與  $xy$ -平面的交集,  $yz$ -曲面截線為曲面與  $yz$ -平面的交集,  $xz$ -曲面截線為曲面與  $xz$ -平面的交集.

空間中的曲面在視覺上不易整體地體會出，或繪出，但可透過曲面截線得出在二維坐標系統中的部份，並經由較熟悉的平面中的繪圖經驗而體會並描繪出，繼而對整體的曲面有較具體的認識。

例 2. 試求球面

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

的  $xy$ -曲面截線。

<解> 根據上述曲面截線的定義，原問題乃相當於求球面與  $xy$ -平面的交集。又  $xy$ -平面就是  $z = 0$ ，故  $xy$ -曲面截線為方程組

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

亦相當於將  $z = 0$  代入球面方程式，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (0 + 4)^2 = 25$$

經由整理，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

乃一熟悉的，在  $xy$ -平面上的平面方程式。

因此, 球面的  $xy$ -曲面截線為一個以  $(3, 2)$  為圓心, 半徑為 3 的圓.

另代  $z = -1$ , 得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

乃一在平面  $z = -1$  上的圓, 其圓心為  $(3, 2, -1)$ , 半徑為 4, 亦可將此曲面截線投影在  $xy$ -平面上, 得出同樣大小的圓.

若代  $z = 1$ , 得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

僅  $(3, 2)$  滿足, 表示在平面  $z = 1$  上, 曲面截線退化為一個點  $(3, 2, 1)$ , 它在  $xy$ -平面上的投影就是點  $(3, 2)$ .

亦可嘗試代其它的  $z$  值, 得出對應的, 與  $xy$ -平面平行的曲面截線, 但當  $z > 1$  或  $z < -9$  時, 不會產生曲面截線, 因為此時的交集為空集合.