

## 單元 42: 瑕積分

(課本 §6.6)

根據定義, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

乃要求

- (1) 積分區間  $[a, b]$  的長度有限.
- (2) 被積函數  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

若上述的第 (1) 項條件不滿足, 亦即, 至少有一積分界限是無窮大, 則稱此類積分為 "無窮積分界限的瑕積分" (improper integral with infinite limits of integration), 如

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

其中下積分界限為有限值 0, 但上積分界限為正無窮大, 而形成積分區間的長度為無窮大, 或

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

其中上下積分界限分別為正無窮大與負無窮大，而形成長度為無窮大的積分區間。

若上述的第 (2) 項條件不滿足，亦即，被積函數在  $[a, b]$  內有無窮非連續點，則稱此類積分為“無窮被積函數的瑕積分”(improper integral with infinite integrand)，如

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

其中在  $x = 1$  時，分母為 0，而導出

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

顯示被積函數在  $x = 0$  的右邊為無界地遞增，非有界，或

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

其中在  $x = -1$  時，分母為 0，並由此導出

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

亦即，被積函數在  $x = -1$  的兩邊均為無界地遞增，而非有界。

問．如何求瑕積分？

答. 根據不同類型的瑕積分, 有下述的不同方法.

一. 無窮積分界限的瑕積分

(1) 設被積函數  $f(x)$  在  $[a, \infty)$  上連續, 則瑕積分

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

亦即, 先在有限的積分區間  $[a, b]$  內求定積分  $\int_a^b f(x)dx$  (因為  $f(x)$  在閉區間  $[a, b]$  上連續, 故一定存在), 再將上積分界限  $b$  擴展到正無窮大, 求定積分的極限, 如圖示, 並稱作右單邊瑕積分.

(2) 設被積函數  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上連續, 則瑕積分

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

亦即, 先在有限的積分區間  $[a, b]$  內求定積分  $\int_a^b f(x)dx$  (一定存在, 因為  $f(x)$  在  $[a, b]$  連續), 再求下積分界限擴展到負無窮大的極限, 如圖示, 並稱作左單邊瑕積分.

(3) 設  $f(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  上連續, 則任取一點  $c$ , 得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx \\ & = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

亦即，先取任一點  $c$ ，將上下積分界限均為無界的瑕積分，改寫成左單邊瑕積分與右單邊瑕積分的和，再根據上述各自單邊瑕積分的定義求出瑕積分，如圖示，並稱作雙邊瑕積分。

註．理論上，可任意選取  $c$ ，但以方便為原則。

定義．若上述三項等號右邊的極限存在，則稱瑕積分收斂 (convergent)；否則，稱瑕積分為發散 (divergent)。

例 1．試判斷下列各瑕積分為收斂或發散。

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

(b)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

(c)  $\int_{-\infty}^0 2xe^{-x^2} dx$

(d)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx$

<解> (a) 因為上積分界限為正無窮大，故為一無窮積分界限的瑕積分（或右單邊瑕積分），且根據定義，

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

如圖示。又定積分

$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_1^b \\ &= -\frac{1}{b} - (-1) = 1 - \frac{1}{b} \end{aligned}$$

接著，取極限，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{1}{b} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

所以，瑕積分收斂。幾何意義乃表示，由  $1/x^2$  在 1 的右邊所形成的無界區域的面積為 1，如圖示。

(b) 同 (a)，為一右單邊瑕積分，故由定義，

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

如圖示。又定積分

$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{1}{x} dx &= \ln |x| \Big|_1^b \\ &= \ln b - \ln 1 = \ln b \end{aligned}$$

因此,

$$\text{原式} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \ln \infty = \infty$$

為發散. 幾何意義乃表示, 由  $1/x$  在 1 的右邊所形成的無界區域的面積為無窮大, 如圖示.

註. 雖然  $1/x^2$  與  $1/x$  在 1 的右邊所形成的區域均為無界區域, 但由於  $1/x^2$  比  $1/x$ , 在大的  $x$  值時, 更靠近 0, 而有全然不同的面積特性, 一為有限值, 另一為無限值, 如圖示.

(c) 原式為一下積分界限為負無窮大的無窮積分界限的瑕積分 (或左單邊瑕積分), 故根據定義,

$$\int_{-\infty}^0 2xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 2xe^{-x^2} dx$$

如圖示. 又根據取

$$u = -x^2, \quad du = -2x dx$$

的代入法, 定積分

$$\begin{aligned} \int_a^0 2xe^{-x^2} dx &= - \int_a^0 \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u} \underbrace{(-2x) dx}_{du} \\ &= -e^{-x^2} \Big|_a^0 \\ &= -e^0 - \left( -e^{-a^2} \right) = e^{-a^2} - 1 \end{aligned}$$

接著，取極限，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{-a^2} - 1) \\ &= e^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1\end{aligned}$$

故瑕積分收斂.

(d) 同 (c)，為一左單邊瑕積分，故由定義，

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx$$

又根據取

$$u = 1 - 2x, \quad du = -2dx$$

的代入法，定積分

$$\begin{aligned}& \int_a^0 \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^0 \underbrace{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}}_{u^{-3/2}} \underbrace{(-2)dx}_{du} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \Big|_a^0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2a}}\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2a}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\infty}} \\ &= 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

為收斂.

## 二. 無窮被積函數的瑕積分

(1) 被積函數  $f(x)$  在  $[a, b)$  上連續, 但在  $x = b$  有無窮非連續點, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx$$

亦即, 先在較小的區間  $[a, c]$  內求定積分 (因為  $f(x)$  在閉區間  $[a, c]$  上連續, 故一定存在), 再將上積分界限  $c$  任意地靠近  $b$ , 求定積分的左單邊極限, 如圖示.

(2) 被積函數  $f(x)$  在  $(a, b]$  上連續, 但在  $x = a$  有無窮非連續點, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx$$

亦即, 先在較小的區間  $[c, b]$  內求定積分 (一定存在, 因為  $f(x)$  在  $[c, b]$  上連續), 再將下積分界限  $c$  任意地靠近  $a$ , 求定積分的右單邊極限, 如圖示.

(3) 被積函數  $f(x)$  在  $[a, b]$  中的某點  $c$  有無窮非連續點外, 均連續, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



亦即，將原瑕積分改寫成第 (1) 類與第 (2) 類瑕積分的和，再根據各類瑕積分的定義求出瑕積分，如圖示。

定義．若上述三項等號右邊的極限存在，則稱瑕積分收斂 (convergent)；否則，稱瑕積分為發散 (divergent)。

例 2. 試求下列各瑕積分。

$$(a) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$(b) \int_1^2 \frac{2}{x^2 - 2x} dx$$

$$(c) \int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx$$

<解> (a) 因為積分區間的長度有限，故為無窮被積函數的瑕積分，而需先找出無窮非連續點，再根據對應的定義求瑕積分。首先，被積函數  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$  在  $x = 1$  有無窮非連續點，因為分母為 0，而導致

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

故, 根據定義, 瑕積分

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

如圖示. 又定積分

$$\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2\sqrt{x-1} \Big|_c^2 = 2 - 2\sqrt{c-1}$$

因此, 取  $x = 1$  的右單邊極限, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{c \rightarrow 1^+} (2 - 2\sqrt{c-1}) \\ &= 2 - 2\sqrt{1-1} = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

為收斂.

(b) 同 (a), 為一無窮被積函數的瑕積分. 經由分解分母, 得

$$\text{原式} = \int_1^2 \frac{2}{x(x-2)} dx$$

故在積分區間  $[1, 2]$  內的  $x = 2$  有無窮非連續點, 因為在此點分母 0, 而導致

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{2 \cdot 0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

因此, 根據定義, 瑕積分

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2 - 2x} dx = \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_1^c \frac{2}{x(x-2)} dx$$

如圖示. 又根據部份分式, 得定積分

$$\begin{aligned} & \int_1^c \frac{2}{x(x-2)} dx \\ &= \int_1^c \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x| \Big|_1^c \\ &= (\ln(2-c) - \ln c) - (\ln 1 - \ln 1) \\ &= \ln(2-c) - \ln c \end{aligned}$$

接著, 取  $x = 2$  的左單邊極限, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{c \rightarrow 2^-} [\ln(2-c) - \ln c] \\ &= \ln 0^+ - \ln 2 \\ &= -\infty - \ln 2 = -\infty \end{aligned}$$

故瑕積分發散.

(c) 同 (a), 為一無窮被積函數的瑕積分. 又在  $x = 0$  有無窮非連續點, 因為分母為 0, 並導致

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^-)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^3} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

故，根據定義，瑕積分

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^3} dx$$

表成第一類與第二類瑕積分的和，如圖示。又瑕積分

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^2 \frac{1}{x^3} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{2x^2} \Big|_c^2 \right) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2c^2} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{8} = \infty \end{aligned}$$

為發散。因此，原式發散。

註．當一個瑕積分表成兩個瑕積分的和時，根據定義，需要等號右邊的兩個瑕積分均收斂，原瑕積分才收斂。因此，當其中一個瑕積分為發散時，原瑕積分即發散，而不需要判斷出另一個瑕積分為收斂或發散後，再下結論；但當原瑕積分為收斂時，就需要判斷出兩個瑕積分均收斂後，才可下結論。