

單元 24: 指數函數

(課本 §4.1)

一. 定義

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 則以 a 為底數的指數函數

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a^x$$

二. 性質

指數函數有下述的指數律,

$$(1) a^0 = 1$$

$$(2) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(3) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(4) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(5) (ab)^x = a^x b^x$$

$$(6) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(7) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

三. 圖形

(i) 當底數 $a > 1$ 時, 指數函數 $y = a^x$ 的圖形如下, 得

(1) 定義域為 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域為 $(0, \infty)$, 且過點 $(0, 1)$.

(3) 遞增, 上凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數.

(6) 當 x 向右無界地延伸時,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = a^\infty = \infty$$

(7) 當 x 向左無界地延伸時,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0$$

得 $y = 0$ 為一水平漸近線.

(ii) 指數函數

$$y = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x, \quad a > 1$$

亦相當於

$$y = b^x, \quad 0 < b < 1$$

亦即, 底數小於 1 的正數的指數函數, 其圖形如下, 得

(1) 定義域為 $(-\infty, \infty)$.

(2) 值域為 $(0, \infty)$, 且過點 $(0, 1)$.

(3) 遞減, 上凹.

(4) 連續.

(5) 一對一, 故有反函數.

(6) 當 x 向右無界地延伸時,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = a^{-\infty} = 0, \quad a > 1$$

亦相當於

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b^x = b^{\infty} = 0, \quad 0 < b < 1$$

得 $y = 0$ 為一水平漸近線.

(7) 當 x 向左無界地延伸時,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-x} = a^{-(-\infty)} = a^{\infty} = \infty, \quad a > 1$$

亦相當於

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = b^{-\infty} = \infty, \quad 0 < b < 1$$

例 1. 試求下列各方程式的解.

(a) $3^x = 81$

$$(b) 5^{x+1} = 125$$

$$(c) (x + 3)^{4/3} = 16$$

<解> (a) 因爲

$$3^x = 81 = 3^4$$

故根據指數函數的一對一性質, 得

$$x = 4$$

(b) 因爲

$$5^{x+1} = 125 = 5^3$$

故根據指數函數的一對一性質, 得

$$x + 1 = 3$$

因此,

$$x = 2$$

(c) 由

$$(x + 3)^{4/3} = 16 = 2^4$$

以及指數律

$$(x + 3)^{4/3} = \left((x + 3)^{1/3}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{x + 3}\right)^4$$

得

$$\sqrt[3]{x + 3} = \pm 2$$

再將上式的兩邊三次方, 得

$$(x + 3) = (\pm 2)^3 = \pm 8$$

因此,

$$x = \pm 8 - 3 = -11 \text{ 或 } 5$$

四. 應用

考古學上, 追溯有機物質存在的時間 (dating organic material).

在活的有機物中, 放射性碳同位素 (radioactive carbon isotopes) 與全部的碳原子 (carbon atoms) 的比率

$$R = \frac{1}{10^{12}}$$

有機物死後，放射性碳同位素開始以半生期 (half-life, 或稱作半衰期) 為 5700 年的速度退化，亦即，每經過 5700 年，放射性碳同位素的數量減半，例如經過死亡後的第一個 5700 年，比率

$$R = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)$$

經過第二個 5700 年，得比率

$$R = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

經過第三個 5700 年，得比率

$$R = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

⋮

因此，得比率模型 (ratio model)

$$R = \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5700}, \quad t \geq 0$$

如圖示.

若現在量得一恐龍骨頭中的比率

$$R \approx 2.964 \times 10^{-13}$$

問恐龍大概在多少年前生存在地球上?

<解> 因為當恐龍死亡後的年數 $t = 10000$ 時, 根據上述的比率模型, 其骨中的比率

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{10^{12}} \left(\frac{1}{2}\right)^{10000/5700} \\ &\approx 2.964 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

就是現在量得的比率, 故恐龍大概在 10000 年前死亡.

註. 介紹對數函數後, 可實際地解 t .