單元 17: 極值與一階導函數檢定法
(課本 §3.2)

定義. 令函數 f 在 $x = c$ 有定義.

(1) $f(c)$ 爲一相對極大值 (relative maximum) 若且爲若存在一個含 c 的區間 (a, b) 且對所有 (a, b) 中的 x, $f(x) \leq f(c)$.

(2) $f(c)$ 爲一相對極小值 (relative minimum) 若且爲若存在一個含 c 的區間 (a, b) 且對所有 (a, b) 中的 x, $f(c) \leq f(x)$.

(3) 相對極大值或相對極小值統稱爲相對極值 (relative extremum).

圖示如下.

觀察. 產生相對極值的必然現象: 若 f 在 $x = c$ 有一相對極大值或相對極小值, 則 c 必然爲 f 的臨界數, 亦即, $f'(c) = 0$ (第一類) 或 $f'(c)$ 未定義 (第二類).

結論. 找相對極值時, 只需由臨界數中找即可, 因爲根據上述的必然現象, 相對極值不可能發生在臨界數以外的點, 故臨界數亦稱作相對極值候選數 (candidate), 方法如下.

一階導函數檢定法 (1st-derivative test, 求相對極值的方法). 設函數 f 在開區間 (a, b) 上連續且 c 爲 f 在 (a, b) 中唯一的臨界數. 若 f 在 (a, b) 中, 除 c 以外, 均可微, 則

(1) $f'(x)$ 在 c 附近的符號圖爲由 $(+)$ 到 $(-)$, 如圖示, 得 $f(c)$ 爲一相對極大值.

(2) $f'(x)$ 在 c 附近的符號圖爲由 $(-)$ 到 $(+)$, 如圖示, 得 $f(c)$ 爲一相對極小值.

(3) $f'(x)$ 在 c 附近的符號圖爲由 $(+)$ 到 $(+)$ 或由 $(-)$ 到 $(-)$, 亦即未變號, 如圖示, 得 $f(c)$ 不是一相對極值.

爲何如此? 根據圖示,

(1) f': 由 $(+)$ 到 $(-)$ 表示 f 由 c 的左邊開始遞增至 $f(c)$ 後, 轉爲遞減, 故 $f(c)$ 爲一相對極大值.

(2) f': 由 $(-)$ 到 $(+)$ 表示 f 由 c 的左邊開始遞減至 $f(c)$ 後, 轉爲遞增, 故 $f(c)$ 爲一相對極小值.

(3) f': 由 $(+)$ 到 $(+)$ 表示 f 由 c 的左邊開始遞增至 $f(c)$ 後, 繼續遞增, 故 $f(c)$ 不是一相對極值; 同理, 由 $(-)$ 到 $(-)$ 表示 f 由 c 的左邊開始遞減至 $f(c)$ 後, 繼續遞減, 故 $f(c)$ 亦不是一相對極值.

例 1. 試求函數

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 14$$

的相對極值.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲 f 爲一多項式, 故連續, 無任何非連續點.

(2) 臨界數: 根據定義, 乃使得 f' 爲 0 或未定義的 x, 故需經由微分並分解, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 36 \\ &= 6(x^2 - x - 6) \\ &= 6(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

又第一類臨界數乃相當於 $f'=0$ 的 x, 亦即,

$$6(x-3)(x+2)=0$$

故

$$x=-2,\ 3$$

第二類臨界數乃 f' 未定義的 x, 無, 因爲 f' 爲多項式, 在整個實數線上都有定義.

(ii) 一階導函數檢定法. 首先, 決定 f' 的符號. 根據 (i) 中的重要點, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty,-2)$: $f'=(-)(-)=(+)$, 遞增.

$(-2,3)$: $f'=(-)(+)=(-)$, 遞減.

$(3,\infty)$: $f'=(+)(+)=(+)$, 遞增.

接著, 根據一階導函數檢定法, f 在 $x=-2$ 有相對極大值

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3-3(-2)^2-36(-2)+14 \\ &= -16-12+72+14=58 \end{aligned}$$

在 $x = 3$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f(3) &= 2(3)^3 - 3(3)^2 - 36(3) + 14 \\ &= 54 - 27 - 108 + 14 = -67 \end{aligned}$$

例 2. 試求函數

$$f(x) = x^4 - x^3$$

的相對極值.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲 f 爲一多項式, 恆連續.

(2) 臨界數: 經由微分並分解, 得

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$$

第一類: $f' = 0$, 故

$$x = 0,\ \frac{3}{4}$$

第二類: f' 未定義, 無, 因爲 f' 爲一多項式, 恆定義.

(ii) 一階導函數檢定法: 根據 (i) 中的重要點, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$\left(0, \frac{3}{4}\right)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

故, f 僅在 $\frac{3}{4}$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= \frac{27}{64}\left(\frac{3}{4} - 1\right) = \frac{-27}{256} \end{aligned}$$

註. 雖然 $x = 0$ 爲一臨界數, 但卻不產生相對極值, 再度說明, 臨界數在未以一階導函數檢定法驗證前, 僅爲相對極值候選數, 它可能會產生相對極大值, 或相對極小值, 或不會產生極值, 需要經由一階導函數檢定法的判定, 才能確定它能產生何種結果.

例 3. 試求函數

$$f(x) = 2x - 3x^{2/3}$$

的相對極值.

<解> (i) 找重要點. (1) 非連續點: 無, 因爲 f 的一項含 x, 另一項含 x 的 $\frac{2}{3}$ 次分, 故恆定義且連續.

(2) 臨界數. 經由微分並化簡, 得

$$f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = \frac{2(x^{1/3} - 1)}{x^{1/3}}$$

第一類: $f' = 0$, 亦相當於分子中的 $x^{1/3} - 1 = 0$, 故

$$x = 1$$

第二類: f' 未定義, 乃相當於分母 $x^{1/3} = 0$, 得

$$x = 0$$

在 f 的定義域內, 故爲一臨界數. 因爲臨界數的先決條件是需要在 f 的定義域內, 故須特別對此種 f' 的分母等於 0 的 x 值, 先判斷是否在 f 的定義域內, 再歸類是否爲一臨界數.

(ii) 一階導函數檢定法. 根據 (i) 中的兩個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = \frac{(-)}{(-)} = (+)$, 遞增.

$(0, 1)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(1,\infty)$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

故, f 在 $x = 0$ 有相對極大值

$$f(0) = 2(0) - 3(0)^{2/3} = 0$$

且在 $x = 1$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1) - 3(1)^{2/3} \\ &= 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

絕對極值 (Absolute Extrema)

設函數 f 定義在閉區間 $[a,b]$ 上, 且圖示如下. 經觀察後, 得

(1) f 在 c_1, c_2, c_3 有相對極值, 亦即, 在局部範圍內的極值; 這是 f 的局部行爲 (local behavior).

(2) 在整個定義域內, f 在 a 及 c_3 有絕對極值, 分別爲絕對最小值 (absolute minimum) 及絕對最大值 (absolute maximum); 這是 f 的全面行爲 (global behavior).

問. 何時會有絕對極值? 會發生在哪些點上?

答 1. 根據如下的

極值定理 (Extrema Value Theorem). 若函數 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 則 f 在 $[a,b]$ 上一定有絕對最小值與絕對最大值.

也就是說, 連續函數在閉區間上一定有絕對最大值與絕對最小值.

答 2. 因爲絕對極值一定是相對極值, 又相對極值只可能發生在臨界數 (critical numbers)上, 故絕對極值可能發生在臨界數上. 另外, 由上述的觀察知, 絕對極值也可能發生在端點 (end points) 上. 因此, 得如下的

結論: 絕對極值可能發生的位置爲臨界數或端點.

問. 如何在閉區間 $[a,b]$ 上, 找出 f 的絕對極值?

答. 根據上述的結論, 得如下求絕對極值的步驟.

(i) 找臨界數與端點, 亦即, 可能產生絕對極值的點, 又稱作絕對極值後選數 (candidates).

(ii) 求 f 在 (i) 中的點的值.

(iii) 比較 (ii) 中的值, 最大者為絕對最大值, 最小者為絕對最小值.

例 4. 試求函數

$$f(x) = 3x^{2/3} - 2x$$

在閉區間 $[-1, 2]$ 上的絕對極值.

<解> 根據上述求絕對極值的步驟, (i) 找絕對極值後選數. (1) 臨界數: 經由微分及化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} - 2 \\ &= 2\left(\frac{1 - x^{1/3}}{x^{1/3}}\right) \end{aligned}$$

第一類: $f' = 0$, 亦相當於分子中的 $1 - x^{1/3} = 0$, 得

$$x = 1 \in [-1, 2]$$

第二類: f' 未定義, 乃相當於分母 $x^{1/3} = 0$, 故

$$x = 0 \in [-1, 2]$$

因此, 得二個臨界數

$$x = 0,\ 1$$

(2) 端點: 由給定的定義域, 得

$$x = -1,\ 2$$

(ii) 求絕對極值後選數的 f 值. 根據 f 的定義及上述的候選數, 得

$f(0) = 3(0)^{2/3} - 2(0) = 0$ (最小)

$f(1) = 3(1)^{2/3} - 2(1) = 3 - 2 = 1$

$f(-1) = 3(-1)^{2/3} - 2(-1) = 3 + 2 = 5$ (最大)

$f(2) = 3(2)^{2/3} - 2(2) = 3\sqrt[3]{4} - 4 \approx 0.762$

(iii) 經由比較 (ii) 中的各值後, 得

$$\text{絕對最大值} = 5$$

發生在

$$x = -1 \text{ (端點)}$$

且

$$\text{絕對最小值} = 0$$

發生在

$$x = 0 \text{ (臨界數)}$$

註. 根據例 4 中的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 的符號圖, 如下述及圖示.

$[-1, 0]$: $f' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, 遞減.

$[0, 1]$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

$[1, 2]$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法, 得 f 在 $x = 0$ 有一相對極小值, 經由與端點的函數值比較後, 亦是一絕對最小值; 然而在 $x = 1$ 僅得一相對極大值, 因爲有一端點的函數值比較大, 故無法成爲絕對最大值; 絕對最大值發生在端

點 $x = -1$ 的地方. 再度說明, 需要與端點的函數值比較後, 才能確認出相對極值是否爲絕對極值.

例 5. 設一速食店的利潤

$$P = 2.44x - \frac{x^2}{20000} - 5000$$

其中

$$0 \leq x \leq 50000$$

試求得最大利潤的銷售量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於求連續函數 P 在閉區間 $[0, 50000]$ 上的絕對最大值. 故根據上述的步驟, (i) 找絕對極值後選數. (1) 臨界數: 經由微分, 得

$$P' = 2.44 - \frac{1}{10000}x$$

第一類: $P' = 0$, 得

$$x = 2.44 \cdot 10000 = 24400$$

第二類: P' 未定義, 無, 因爲 P' 爲一多項式, 恆定義.

(ii) 判斷. (1) 一階導函數檢定法. 因爲 P' 爲連續且只有一個臨界數, 故由下述的 P' 符號圖

$[0, 24400]$: $P' = (+)$, 遞增,

$[24400, 50000]$: $P' = (-)$, 遞減,

得利潤 P 在銷售量 $x = 24000$ 時, 有相對極大值, 亦爲一絕對最大值, 因爲在只有一個臨界數的情形下, 由 P 的遞增與遞減性質, 在二個端點的 P 值都較小.

或 (2) 求利潤 P 在臨界數與端點的值, 得

$$\begin{aligned} P(0) &= 2.44(0) - \frac{0^2}{20000} - 5000 \\ &= -5000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(24400) \\ &= 2.44(24400) - \frac{(24400)^2}{20000} - 5000 \\ &= 59536 - \frac{535360000}{20000} - 5000 \\ &= 59536 - 29768 - 5000 \\ &= 24768 \text{ (最大)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(50000) \\ &= 2.44(50000) - \frac{(50000)^2}{20000} - 5000 \\ &= 122000 - 125000 - 5000 \\ &= -8000 \text{ (最小)} \end{aligned}$$

經比較後, 得 P 在 $x = 24400$ 時有絕對最大值.

因此, 根據 (1) 一階導函數檢定法 (只適用於導函數爲連續且只有一個臨界數的情況下) 或 (2) 求絕對極值的比較法, 當銷售量 $x = 24400$ 件時, 有最大利潤

$$P(24400) = 24768$$