單元 11: 乘積與分式法則
(課本 §2.4)

一. 乘積法則 (Product Rule)

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均爲可微, 則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

註 1. 根據乘法與加法的交換律, 乘積法則可有不同的呈現方式, 如

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

或其他, 但重點卻是兩個函數都要分別被微分並同時乘上未被微分的函數, 再將前面的結果相加.

註 2 乘積法則不同於加減法則, 絕對不可以將每個函數微分後再相乘, 亦即, 不可以逐項微分再做對應的乘法運算, 如下述

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

註 3. 乘積法則可推廣至三個以上的函數, 亦即每個函數都分別被微分並同時乘上未被微分的函數, 再將這些結果相加, 如

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]\\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+\\ &\qquad f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

二. 分式法則 (Quotient Rule)

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均可微, 則當 $g(x) \neq 0$ 時,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

亦即, 分母的平方分之一, 再乘上 "分子的導函數乘分母減分子乘分母的導函數".

註 1. 根據乘法的交換律, 只可將含乘積的項做不同形式的呈現, 如

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

或其他的形式, 但重點還是<u>先對分子微分</u>乘上分母, <u>再</u>減去分子乘上<u>對分母微分</u>.

註 2. 因為沒有減法的交換律，絕對不可將微分的次序交換，亦即先對分母微分，再將分子微分，如

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[g(x)]^2}$$

註 3. 與乘積法則一樣，絕對不可以將每個函數微分後再相除，亦即，不可以逐項微分後再做對應的除法運算，如下述

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(x - 1)$

(c) $y = 2x^2\left(x + \frac{4}{x^3}\right)$

<解> (a) 因為 y 為兩個函數的乘積, 故直接根據乘積法則, 得

$$\begin{aligned} y' &= (3x-2x^2)'(5+4x)+ \\ &\qquad (3x-2x^2)(5+4x)' \\ &= (3-4x)(5+4x)+(3x-2x^2)(4) \\ &= 15+12x-20x-16x^2+12x-8x^2 \\ &= -24x^2+4x+15 \end{aligned}$$

(b) 首先, 儘可能的將每一項改寫成 cx^n 的形式, 得

$$f(x)=(x^{-1}+1)(x-1)$$

接著, 根據乘積法則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{-1}+1)'(x-1)+ \\ &\qquad (x^{-1}+1)(x-1)' \\ &= (-1)x^{-2}(x-1)+(x^{-1}+1)(1) \end{aligned}$$

最後, 透過展開以及提出最小次方因式的化簡步驟, 得

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^{-1}+x^{-2}+x^{-1}+1 \\ &= x^{-2}(-x+1+x+x^2) \\ &= \frac{1+x^2}{x^2} \end{aligned}$$

(c) 因爲形成乘積的二因式中, 有一個只有一項, 故簡單的作法是展開後, 逐項微分, 而避開較複雜的乘積法則, 亦即,

$$f(x) = 2x^3 + 8x^{-1}$$

且經由逐項微分, 得

$$f'(x) = 6x^2 - 8x^{-2} = \frac{6x^4 - 8}{x^2}$$

例 2. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \dfrac{x-1}{2x+3}$

(b) $y = \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{x+5}$

(c) $f(x) = \dfrac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$

(d) $y = \dfrac{(1-2x)(3x+2)}{5x-4}$

<解> (a) 因為 y 為兩個函數的商，故直接根據分式法則，得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-1)'(2x+3)-(x-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{(2x+3)-(x-1)(2)}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

最後，將分子展開化簡，得

$$y' = \frac{5}{(2x+3)^2}$$

(b) 因為原式為一個繁分式，故經由分子與分母同乘 x 的化簡步驟，得

$$y = \frac{3x-1}{x^2+5x}$$

接著，根據分式法則，

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x-1)'(x^2+5x)-(3x-1)(x^2+5x)'}{(x^2+5x)^2} \\ &= \frac{3(x^2+5x)-(3x-1)(2x+5)}{(x^2+5x)^2} \\ &= \frac{3x^2+15x-6x^2+2x-15x+5}{(x^2+5x)^2} \\ &= \frac{-3x^2+2x+5}{(x^2+5x)^2} \end{aligned}$$

(c) 因爲分母只有一項, 故一個簡單的作法是根據分配律, 將分子的每一項改寫成 cx^n 的形式後, 再逐項微分, 而避開較複雜的分式法則, 亦即, 將分子與分母的常數提出後, 再根據分配律, 得

$$f(x) = -\frac{3}{7}(3 - 2x)$$

最後, 經由逐項微分,

$$f'(x) = -\frac{3}{7}(-2) = \frac{6}{7}$$

(d) 因爲原式的分子爲一乘積, 故直接使用分式法則時, 會在微分的過程中也用到乘積法則, 整體而言, 較複雜, 可自行嘗試看看. 一個簡單的作法是, 在可行的情況下, 儘可能地只使用分式法則或乘積法則中的一種, 而避開同時使用二種法則, 故根據原式, 可行的作法是先將分子展開, 得

$$y = \frac{-6x^2 - x + 2}{5x - 4}$$

再根據分式法則, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-12x - 1)(5x - 4) - (-6x^2 - x + 2)(5)}{(5x - 4)^2} \\ &= \frac{-60x^2 + 43x + 4 + 30x^2 + 5x - 10}{(5x - 4)^2} \\ &= \frac{-30x^2 + 48x - 6}{(5x - 4)^2} \end{aligned}$$