單元 58: 泰勒多項式
(課本 §10.5)

一. 以一個問題開始, 如何估計 e^{-x}?

因為

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ -\infty < x < \infty$$

故經由代入 $-x$ 的合成運算, 以及化簡整理, 得

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &\qquad + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

且定義域

$$D = (-\infty, \infty)$$

但是因為此冪級數是一無窮項的和, 故在實務上是不可行的; 一個可行的方法為, 取至 x^n 的前面有限項的和

$$S_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

稱作以 $c = 0$ 為中心的 n 階泰勒多項式 (nth-degree Taylor polynomial), 估計 e^{-x}.

註. 一個可由圖表得到的明顯現象為, 當 x 愈接近中心點 $c = 0$, 以及階數 n 愈大時, 此種估計愈準確. 此現象可由下述的定理予以準確地說明與驗證.

泰勒餘項定理 (Taylor's Theorem with Remainder). 若 I 為某一含 c 的區間, 且對於所有 I 中的 x, 函數 $f(x)$ 可被微分至 $(n+1)$ 次, 則對於所有 I 中的 x,

$$f(x) = S_n(x) + R_n$$

其中

$$\begin{aligned} S_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \end{aligned}$$

稱作以 c 為中心的泰勒多項式, 且

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

稱作 n 階餘項, 其中 z 為某一介於 x 與 c 之間的未知點, 如圖示, 也就是說, 函數 $f(x)$ 可表示成 n 階泰勒多項式 $S_n(x)$ 與 n 階餘項 R_n 的和.

註. R_n 可視爲以 n 階泰勒多項式 $S_n(x)$ 估計 $f(x)$ 的 n 階誤差, 它的值無法確定, 因爲其中的 z 值無法確定, 但可根據 $f^{(n+1)}(x)$ 在 x 與 c 所構成的區間內的上界估計; 由 R_n 的公式可知它的特性爲, 當 x 愈靠近中心點 c, 以及階數 n 愈大時, R_n 會愈小, 以 $S_n(x)$ 估計 $f(x)$ 會愈準確.

例 1. 試以 4 階泰勒多項式估計 $e^{-0.75}$, 並求最大的誤差.

<解> 根據泰勒餘項定理以及題意, 需先求出 4 階泰勒多項式 $S_4(x)$ 與 4 階餘項 R_4. 因爲是估計指數函數在

$$x = -0.75$$

一個靠近 0 的數, 的值, 故可令

$$f(x) = e^x$$

並由以 0 爲中心的冪級數表示式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

得 4 階泰勒多項式

$$S_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

以及 4 階餘項

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5$$

其中 z 一個介於 0 與 x 間的未知點.

接著, 代入 $x = -0.75$, 得

$$\begin{aligned} e^{-0.75} &\approx S_4(-0.75) \\ &= 1 - 0.75 + \frac{(0.75)^2}{2!} - \frac{(0.75)^3}{3!} \\ &\qquad + \frac{(0.75)^4}{4!} \\ &\approx 0.474 \end{aligned}$$

並根據 n 階導函數

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

得 4 階餘項

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{e^z}{5!}(-0.75)^5 \\ &= -\frac{e^z}{5!}(0.75)^5, \; -0.75 < z < 0 \end{aligned}$$

最後, 因爲 e^x 爲一遞增函數, 故當

$$-0.75 < z < 0$$

時,

$$e^z \le e^0 = 1$$

並由 4 階餘項, 得誤差

$$\begin{aligned} |R_4| &= \frac{e^z}{5!}(0.75)^5 \\ &\le \frac{e^0}{5!}(0.75)^5 = \frac{1}{120}(0.75)^5 \\ &\approx 0.002 \end{aligned}$$

因此, 最大誤差約爲 0.002.

二. 另一個問題, 如何估計定積分?

已知的方法爲, 中點法則, 梯形法則, 以及辛普森法則等三個方法.

一個新的方法爲冪級數法則 (或稱泰勒多項式法則), 以例說明如下.

例 2. 試以 e^{-x^2} 的 8 階泰勒多項式 $S_8(x)$ 估計定積分

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

<解> 因爲積分的範圍是閉區間 $[0,1]$, 一個在 0 附近的範圍, 且被積函數爲指數函數 e^x 與 $-x^2$ 的合成函數, 故考慮以 0 爲中心的冪級數表示式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

並代入 $-x^2$, 以及化簡整理, 得 8 階泰勒多項式

$$S_8(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

接著, 根據泰勒餘項定理, 當 $0 < x < 1$ 時,

$$e^{-x^2} \approx S_8(x)$$

並由此導出

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx \int_0^1 S_8(x) dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}\right) dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \\
&\approx 0.747
\end{aligned}$$