單元 56: p-級數與比值檢定法
(課本 §10.3)

一. p-級數

定義. 令 $p > 0$, 型如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的級數, 稱作 p-級數.

當 $p = 1$ 時, 得一特例,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

稱作調和級數 (harmonic series).

問. 如何判斷 p-級數為收斂或發散?

p-級數檢定法: 給定一 p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

則

(1) 此 p-級數收斂, 若 $p > 1$.

(2) 此 p-級數發散, 若 $0 < p \leq 1$.

例 1. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

<解> 判斷級數爲收斂或發散的第一步, 是要辨識出此級數是哪一類的級數, 如等比級數, 或 p-級數, 或是一般級數, 再根據對應的檢定法判斷, 如爲等比級數, 則需檢定公比的絕對值 $|r|$ 是否小於 1, 若爲 p-級數, 則需檢定 p 値是否大於 1, 而判斷爲收斂或發散; 如爲一般級數, 目前只能根據一般項的極限不爲 0 時, 而判斷爲發散, 或根據定義, 以前 n 項和 S_n 的極限是否存在, 判斷爲收斂或發散. 既然需辨識出何種級數, 又需根據對應的檢定法, 故多加練習以培養出直覺, 是必要的學習過程.

(a) 因爲一般項可改寫爲

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

故經由辨識, 原式爲

$$p = \frac{1}{2} \leq 1$$

的 p-級數. 因此, 根據 p-級數檢定法, p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

發散.

(b) 明顯地, 原式爲

$$p = 0.9 \leq 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$$

發散.

(c) 顯然地, 原式爲

$$p = \pi > 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$$

收斂.

註. (a) 小題的級數的一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

但級數發散; 又 (c) 小題的級數的一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\pi}} = 0$$

但級數卻收斂; 雖然一般項的極限均爲 0, 卻得出兩種全然不同的結果. 此乃說明, 一般項的極限等於 0 時, 並不是一個充分的理由, 可判斷出級數爲收斂或發散, 而無法做出結論. 再次強調, 一般項檢定法, 只在一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

時, 才能做出發散的結論.

(d) 經由辨識, 原式既不是等比級數, 也不是 p-級數, 而是一般類級數, 故先嘗試一般項檢定法, 經由分子分母同除以 n 的典型作法, 以及代入法, 得一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5+1/n} = \frac{3}{5} \neq 0$$

故根據一般項檢定法, 一般類級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n+1}$$

發散.

(e) 經由辨識, 原式爲一等比級數, 且公比的絕對值

$$|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

故根據等比級數檢定法, 等比級數收斂, 且代入

$$首項 = 5\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}$$

以及公比

$$r = -\frac{2}{3}$$

得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{-10/3}{1-(-2/3)} \\ &= \left(-\frac{10}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -2\end{aligned}$$

(f) 顯然地, 原式為

$$p = 1 \leq 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, p-級數, 亦稱作調和級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

發散.

註. 若採用一般項檢定法, 調和級數的一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

無法得出任何結論; 此發散的結論乃是根據 p-級數檢定法判斷出的.

再次提醒, 一般項檢定法是用來判斷發散的, 且當一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

時, 無法下結論.

二. 比值檢定法

當一般類級數的一般項含有指數函數或階乘函數時, 一個判斷收斂或發散的有效方法爲下述的比值檢定法 (ratio test).

比值檢定法: 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲一個不含有 0 項的無窮級數, 則

(1) 此級數收斂, 若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

(2) 此級數發散, 若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

(3) 無法下結論, 若後項與前項比值的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

例 2. 試判斷下列各級數爲收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$

<解> (a) 經由辨識, 原級數不是等比級數, 也不是一個 p-級數, 而是含有階乘函數及指數函數的一般類級數, 故

可嘗試比值檢定法, 雖然一般項檢定法也是一個合理的嘗試, 但根據前述的一個各類函數大小關係

$$\text{對數函數} \ll \text{多項式函數} \ll \text{指數函數} \ll \text{階乘函數}$$

在分子是無界遞增與無界遞減地震盪, 而分母遠大於分子的情況下, 得一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pm 2^n}{n!} = 0$$

乃無法判斷.

接著嘗試比值檢定法. 根據除以一數等於乘上此數的顛倒數, 並經由化簡整理, 以及代入法, 得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \end{aligned}$$

故, 根據比值檢定法, 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

收斂.

(b) 因爲原式不是等比級數，也不是 p-級數，而是含有指數函數的一般類級數，故根據比值檢定法，並經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}(1+0)^2\\ &= \frac{1}{2}<1\end{aligned}$$

並由此導出級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

收斂.

註. 因爲一般項的分子爲一多項式，遠小於分母的指數函數，得一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$$

故無法根據一般項檢定法判斷.

(c) 因爲原式是一個含指數函數的一般類級數，故根據前述的經驗，一個合理的嘗試是比值檢定法. 經由化簡整理，

分子分母同除以 n 的典型作法，以及代入法，得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^5}\cdot\frac{n^5}{3^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5 \\
&= 3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^5 \\
&= 3\left(\frac{1}{1+0}\right)^5 \\
&= 3 > 1
\end{aligned}$$

故，根據比值檢定法，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$$

發散.

註. 亦可採用一般項檢定法，並根據分子的指數函數遠大於分母的多項式函數，得一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n^5} = \infty \neq 0$$

故級數發散，爲一較簡單的判斷法. 此乃說明，判斷級數收斂或發散的方法不是唯一的，只要合理即可，但根據經驗累積的直覺，選擇簡易的檢定法亦是值得重視的.

(d) 經由一般項含有指數函數的辨識, 以及化簡整理, 並根據常數的極限就是常數本身, 得後項比前項的絕對值的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(-1)^n e^{-n}}\right|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{e^{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\\ &= \frac{1}{e}<1\end{aligned}$$

因此, 根據比值檢定法, 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$$

收斂.

註. 經由改寫, 得

$$\text{原式}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{e}\right)^n$$

乃一等比級數, 且公比的絕對值

$$|r|=\left|\frac{-1}{e}\right|=\frac{1}{e}<1$$

故級數收斂, 且代入

$$首項 = \left(\frac{-1}{e}\right)^0 = 1$$

以及公比

$$r = \frac{-1}{e}$$

後, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{-1}{e}} = \frac{e}{e+1}$$

此乃另一種判斷法, 不但簡易, 更可求出此級數的值.

三. 級數檢定法摘要

根據前述的探討, 共四種級數檢定法, 分別爲

(1) 一般項檢定法, 檢定一般類級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

無法判斷收斂; 當一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

時, 級數發散; 當一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

時, 無法判斷.

(2) 等比級數檢定法, 檢定等比級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

當公比的絕對值

$$|r| < 1$$

時, 級數收斂, 且級數的值

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \text{ 或 } \frac{\text{首項}}{1-\text{公比}}$$

當公比的絕對值

$$|r| \geq 1$$

時, 級數發散; 一定可判斷出等比級數爲收斂或發散.

(3) p-級數檢定法, 檢定 p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

當

$$p > 1$$

時, 級數收斂; 當

$$0 < p \leq 1$$

時, 級數發散; 一定可判斷出 p-級數爲收斂或發散, 但沒有簡單的求值公式.

(4) 比值檢定法, 檢定一般類級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

特別是一般項含有指數函數或階乘函數時, 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

時, 級數收斂; 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

時, 級數發散; 當後項比前項的絕對值的極限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

時, 無法判斷.

註. 至目前爲止, 只有等比級數收斂時, 才有求值的公式.

例 3. 試判斷下列各級數爲收斂或發散.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3^n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(0.7)^n$

<解> 判斷級數爲收斂或發散，必要時，首先須經由改寫而辨識出是哪一類型的級數，再根據對應的檢定法，以及級數的特徵，選擇上述摘要中適當的檢定法，予以判斷.

(a) 經由改寫，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

乃一等比級數，且公比的絕對值

$$|r| = \frac{1}{4} < 1$$

故級數收斂，且代入

$$\text{首項} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

以及公比

$$r = \frac{1}{4}$$

後，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

(b) 明顯地, 原式爲

$$p = 4 > 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, p-級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

收斂.

註. (a) 小題與 (b) 小題的差異僅在於對調 4 與 n 的位置, 卻得出兩個完全不同的級數, 故正確地辨識出級數的類型, 並採用適當的檢定法, 是格外地關鍵與重要.

(c) 將常數 5 由累加符號內提出, 得

$$原式 = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

乃一常數乘上一個級數.

接著, 可辨識出上式等號右邊的第二項爲

$$p = 1 \leq 1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, 此 p-級數發散, 乃無界地遞增, 由此導出乘上常數 5 以後的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$$

即原式, 依然是無界地遞增, 而發散.

註 1. (c) 小題乃說明, 可透過級數的常數乘積性質, 將原級數改寫成可辨識的級數後, 再根據適當的檢定法判斷. 同理, 亦可經由級數的和或差的性質, 先行改寫, 再判斷, 如下述的 (d) 小題.

註 2. 若 (b) 與 (c) 小題採用比值檢定法時, 經由化簡整理, 以及在無窮遠極限的典型作法, 得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^4}\cdot\frac{n^4}{1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^4 \\
&= 1
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5}{n+1}\cdot\frac{n}{5}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = 1
\end{aligned}$$

均無法判斷, 乃比值檢定法失效的情況.

同理, 若採用一般項檢定法, 得一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}=0$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0$$

均爲 0, 亦無法判斷.

切記, 勿採用上述兩種無法判斷的方式做出任何結論, 即使結論正確, 但邏輯推理錯誤, 依然不對, 不予計分.

(d) 首先, 根據級數的和或差的性質, 得

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

其中等號右邊第一項爲

$$p=2>1$$

的 p-級數, 故根據 p-級數檢定法, 收斂, 乃一實數; 又第二項爲公比的絕對值

$$|r|=\frac{1}{3}<1$$

的等比級數，根據等比級數檢定法，亦收斂到一實數．因此，原式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3^n}\right)$$

爲二個均收斂到實數的級數的差，相減後依然是一實數，而收斂.

(e) 因爲原式不是等比級數，亦不是 p-級數，乃不含指數函數與階乘函數的一般類級數，且明顯地，一般項的極限

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty\neq 0$$

故根據一般項檢定法，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$$

發散.

(f) 因爲原式的一般項含有指數函數，故經由化簡整理，以及代入法，得後項比前項的絕對值極限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(0.7)^{n+1}}{n(0.7)^n}\right|\\ &= 0.7\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 0.7<1\end{aligned}$$

且根據比值檢定法, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(0.7)^n$$

收斂.

註. 若採用一般項檢定法, 經由改寫, 以及分母乃一底數大於 1 的指數函數, 遠大於分子的多項式, 得一般項極限

$$\lim_{n\to\infty} n(0.7)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{10}{7}\right)^n} = 0$$

無法下結論. 再次提醒, 勿根據一般項極限為 0 的結論, 做出任何判斷, 而需改用其它適用的檢定法作判斷.