單元 41: 瑕積分
(課本 §6.5)

根據定義, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

乃要求

(1) 積分區間 $[a,b]$ 的長度有限.

(2) 被積函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

若上述的第 (1) 項條件不滿足, 亦即, 至少有一積分界限是無窮大, 則稱此類積分爲 "無窮積分界限的瑕積分" (improper integral with infinite limits of integration), 如

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

其中下積分界限爲有限值 0, 但上積分界限爲正無窮大, 而形成積分區間的長度爲無窮大, 或

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

其中上下積分界限分別爲正無窮大與負無窮大, 而形成長度爲無窮大的積分區間.

若上述的第 (2) 項條件不滿足, 亦即, 被積函數在 $[a,b]$ 內有無窮非連續點, 則稱此類積分爲 “無窮被積函數的瑕積分” (improper integral with infinite integrand), 如

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

其中在 $x=1$ 時, 分母爲 0, 而導出

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

顯示被積函數在 $x=0$ 的右邊爲無界地遞增, 非有界, 或

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

其中在 $x=-1$ 時, 分母爲 0, 並由此導出

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

亦即, 被積函數在 $x=-1$ 的兩邊均爲無界地遞增, 而非有界.

問. 如何求瑕積分?

答. 根據不同類型的瑕積分, 有下述的不同方法.

一. 無窮積分界限的瑕積分

(1) 設被積函數 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上連續, 則瑕積分

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

亦即, 先在有限的積分區間 $[a,b]$ 內求定積分 $\int_a^b f(x)dx$ (因爲 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 故一定存在), 再將上積分界限 b 擴展到正無窮大, 求定積分的極限, 如圖示, 並稱作右單邊瑕積分.

(2) 設被積函數 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上連續, 則瑕積分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

亦即, 先在有限的積分區間 $[a,b]$ 內求定積分 $\int_a^b f(x)dx$ (一定存在, 因爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續), 再求下積分界限擴展到負無窮大的極限, 如圖示, 並稱作左單邊瑕積分.

(3) 設 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上連續, 則任取一點 c, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{\infty} f(x)dx \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx
\end{aligned}$$

亦即, 先取任一點 c, 將上下積分界限均為無界的瑕積分, 改寫成左單邊瑕積分與右單邊瑕積分的和, 再根據上述各自單邊瑕積分的定義求出瑕積分, 如圖示, 並稱作雙邊瑕積分.

註. 理論上, 可任意選取 c, 但以方便為原則.

定義. 若上述三項等號右邊的極限存在, 則稱瑕積分收斂 (convergent); 否則, 稱瑕積分為發散 (divergent).

例 1. 試判斷下列各瑕積分為收斂或發散.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 2xe^{-x^2}dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}dx$

<解> (a) 因爲上積分界限爲正無窮大, 故爲一無窮積分界限的瑕積分 (或右單邊瑕積分), 且根據定義,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$$

如圖示. 又定積分

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx &= -\frac{1}{x}\Big|_1^b \\ &= -\frac{1}{b}-(-1) = 1-\frac{1}{b}\end{aligned}$$

接著, 取極限, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b}\right] \\ &= 1-\frac{1}{\infty} = 1-0 = 1\end{aligned}$$

所以, 瑕積分收斂. 幾何意義乃表示, 由 $1/x^2$ 在 1 的右邊所形成的無界區域的面積爲 1, 如圖示.

(b) 同 (a), 爲一右單邊瑕積分, 故由定義,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx$$

如圖示. 又定積分

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{1}{x}dx &= \ln|x|\Big|_1^b \\ &= \ln b - \ln 1 = \ln b\end{aligned}$$

因此,

$$\text{原式} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \ln\infty = \infty$$

爲發散. 幾何意義乃表示, 由 $1/x$ 在 1 的右邊所形成的無界區域的面積爲無窮大, 如圖示.

註. 雖然 $1/x^2$ 與 $1/x$ 在 1 的右邊所形成的區域均爲無界區域, 但由於 $1/x^2$ 比 $1/x$, 在大的 x 值時, 更靠近 0, 而有全然不同的面積特性, 一爲有限值, 另一爲無限值, 如圖示.

(c) 原式爲一下積分界限爲負無窮大的無窮積分界限的瑕積分 (或左單邊瑕積分), 故根據定義,

$$\int_{-\infty}^{0} 2xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 2xe^{-x^2}dx$$

如圖示. 又根據取

$$u = -x^2,\ du = -2xdx$$

的代入法, 定積分

$$\begin{aligned}\int_a^0 2xe^{-x^2}dx &= -\int_a^0 \underbrace{e^{-x^2}}_{e^u}\underbrace{(-2x)dx}_{du}\\ &= -e^{-x^2}\Big|_a^0\\ &= -e^0-\left(-e^{-a^2}\right) = e^{-a^2}-1\end{aligned}$$

接著, 取極限, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{a\to-\infty}\left(e^{-a^2}-1\right) \\ &= e^{-\infty}-1=0-1=-1 \end{aligned}$$

故瑕積分收斂.

(d) 同 (c), 爲一左單邊瑕積分, 故由定義,

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}dx$$

又根據取

$$u=1-2x,\ du=-2dx$$

的代入法, 定積分

$$\begin{aligned} &\int_{a}^{0}\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{a}^{0}\underbrace{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}}}_{u^{-3/2}}\underbrace{(-2)dx}_{du} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot(-2)\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\bigg|_{a}^{0}=1-\frac{1}{\sqrt{1-2a}} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{a\to-\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-2a}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\infty}} \\ &= 1-0=1 \end{aligned}$$

爲收斂.

二. 無窮被積函數的瑕積分

(1) 被積函數 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上連續, 但在 $x=b$ 有無窮非連續點, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

亦即, 先在較小的區間 $[a,c]$ 內求定積分 (因爲 $f(x)$ 在閉區間 $[a,c]$ 上連續, 故一定存在), 再將上積分界限 c 任意地靠近 b, 求定積分的左單邊極限, 如圖示.

(2) 被積函數 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上連續, 但在 $x=a$ 有無窮非連續點, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

亦即, 先在較小的區間 $[c,b]$ 內求定積分 (一定存在, 因爲 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上連續), 再將下積分界限 c 任意地靠近 a, 求定積分的右單邊極限, 如圖示.

(3) 被積函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的某點 c 有無窮非連續點外, 均連續, 則瑕積分

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

亦即, 將原瑕積分改寫成第 (1) 類與第 (2) 類瑕積分的和, 再根據各類瑕積分的定義求出瑕積分, 如圖示.

定義. 若上述三項等號右邊的極限存在, 則稱瑕積分收斂 (convergent); 否則, 稱瑕積分爲發散 (divergent).

例 2. 試求下列各瑕積分.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^2-2x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}dx$

<解> (a) 因爲積分區間的長度有限, 故爲無窮被積函數的瑕積分, 而需先找出無窮非連續點, 再根據對應的定義求瑕積分. 首先, 被積函數 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 在 $x=1$ 有無窮非連續點, 因爲分母爲 0, 而導致

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{0^+}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

故, 根據定義, 瑕積分

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

如圖示. 又定積分

$$\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\sqrt{x-1}\Big|_c^2 = 2-2\sqrt{c-1}$$

因此, 取 $x=1$ 的右單邊極限, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{c\to 1^+}\left(2-2\sqrt{c-1}\right)\\ &= 2-2\sqrt{1-1} = 2-0 = 2\end{aligned}$$

爲收斂.

(b) 同 (a), 爲一無窮被積函數的瑕積分. 經由分解分母, 得

$$\text{原式} = \int_1^2 \frac{2}{x(x-2)}dx$$

故在積分區間 $[1,2]$ 內的 $x=2$ 有無窮非連續點, 因爲在此點分母 0, 而導致

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{2\cdot 0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

因此, 根據定義, 瑕積分

$$\int_1^2 \frac{2}{x^2-2x}dx = \lim_{c\to 2^-}\int_1^c \frac{2}{x(x-2)}dx$$

如圖示. 又根據部分分式, 得定積分

$$\begin{aligned}
&\int_1^c \frac{2}{x(x-2)}dx \\
&= \int_1^c \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \ln|x-2| - \ln|x|\Big|_1^c \\
&= (\ln(2-c) - \ln c) - (\ln 1 - \ln 1) \\
&= \ln(2-c) - \ln c
\end{aligned}$$

接著, 取 $x = 2$ 的左單邊極限, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{c\to 2^-}[\ln(2-c) - \ln c] \\
&= \ln 0^+ - \ln 2 \\
&= -\infty - \ln 2 = -\infty
\end{aligned}$$

故瑕積分發散.

(c) 同 (a), 爲一無窮被積函數的瑕積分. 又在 $x = 0$ 有無窮非連續點, 因爲分母爲 0, 並導致

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^-)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^3} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

故, 根據定義, 瑕積分

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3} dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3} dx$$

表成第一類與第二類瑕積分的和, 如圖示. 又瑕積分

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2} \frac{1}{x^3} dx &= \lim_{c \to 0^+} \int_{c}^{2} \frac{1}{x^3} dx \\
&= \lim_{c \to 0^+} \left(-\frac{1}{2x^2} \Big|_{c}^{2} \right) \\
&= \lim_{c \to 0^+} \left(\frac{1}{2c^2} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{0^+} - \frac{1}{8} = \infty
\end{aligned}$$

爲發散. 因此, 原式發散.

註. 當一個瑕積分表成兩個瑕積分的和時, 根據定義, 需要等號右邊的兩個瑕積分均收斂, 原瑕積分才收斂. 因此, 當其中一個瑕積分爲發散時, 原瑕積分即發散, 而不需要判斷出另一個瑕積分爲收斂或發散後, 再下結論; 但當原瑕積分爲收斂時, 就需要判斷出兩個瑕積分均收斂後, 才可下結論.