單元 40: 數值積分
(課本 §6.4)

不是每一個定積分都可找到一個基本函數爲其被積函數的反導函數, 而以微積分基本定理求值, 故需要以數值積分 (numerical integration) 的方法估計定積分的值.

探討三種估計定積分的數值積分技巧, 如下述.

一. 中點法則 (Midpoint Rule)

將區間 $[a, b]$ 作 n 等分, 得子區間長度

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

取每個子區間的中點, 得中點

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

以中點的函數值爲高, 形成 n 個長方條, 如圖示.

最後, 由圖示, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx n \text{ 個長方條的面積和} \\ &= \frac{b-a}{n}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)] \end{aligned}$$

二. 梯形法則 (Trapezoidal Rule)

將區間 $[a,b]$ 作 n 等分, 得 $(n+1)$ 個端點

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

以及子區間長度

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

以端點的函數值為上下底, 形成 n 個梯形, 如圖示, 並根據梯形面積公式, 得

$$\begin{aligned}
\text{第一個梯形面積} &= \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right]\cdot\frac{b-a}{n} \\
\text{第二個梯形面積} &= \left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]\cdot\frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
\text{第 } n \text{ 個梯形面積} &= \left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\cdot\frac{b-a}{n}
\end{aligned}$$

因此, 由圖示以及上式, 得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx \\
&\approx n \text{ 個梯形面積和} \\
&= \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots \\
&\qquad +f(x_{n-2})+f(x_{n-1})+f(x_{n-1})+f(x_n)]
\end{aligned}$$

接著, 由圖示知, 除了第一個端點 x_0 與最後一個端點 x_n 外, 其餘 $(n-1)$ 個端點的函數值分別作爲左邊梯形的下底與右邊梯形的上底, 故於上式中重複 2 次, 經由合併整理, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \;\approx\; & \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2) \\ & +\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]\end{aligned}$$

註. 梯形法則的係數型式爲

$$1, 2, 2, \ldots, 2, 1$$

例 1. 試以 $n=4$ 與 $n=8$ 的梯形法則估計定積分

$$\int_0^1 e^x dx$$

並與眞正的值比較.

<解> (1) $n=4$. 四等分積分區間 $[0,1]$, 得子區間長度

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

以及端點

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1$$

如圖示.

因此, 根據梯形法則,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 e^x dx \\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[e^0+2e^{0.25}+2e^{0.5}+2e^{0.75}+e^1] \\
&\approx 1.7272
\end{aligned}
$$

(2) $n=8$. 八等分積分區間 $[0,1]$, 得子區間長度

$$\Delta x=\frac{1-0}{8}=\frac{1}{8}$$

以及端點

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ 1$$

如圖示.

故, 由梯形法則, 得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 e^x dx \\
&\approx \frac{1}{16}[e^0+2e^{0.125}+2e^{0.25}+2e^{0.375}+ \\
&\quad 2e^{0.5}+2e^{0.625}+2e^{0.75}+2e^{0.875}+e^1] \\
&\approx 1.7205
\end{aligned}
$$

(3) 根據微積分基本定理,

$$
\begin{aligned}
\text{眞正值} &= \int_0^1 e^x dx \\
&= e^x\Big|_0^1 = e^1 - 1 \approx 1.718282
\end{aligned}
$$

結論. 子區間的個數 n 愈大, 愈準確.

註. 因爲是以直線連結圖形上的兩點, 而形成梯形, 故梯形法則又稱作一次多項式近似.

三. 辛普森法則 (Simpson's Rule)

這是一個二次多項式近似, 如下述. 首先, 將區間 $[a, b]$ 等分成 n (偶數) 個子區間, 得端點

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n$$

以及子區間長度

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

針對每連續兩個子區間的三個端點, 過此三個端點所形成的三個點, 如

$$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2))$$

以二次多項式 $p(x)$ 近似 $f(x)$, 如圖示, 得

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)dx \qquad (1)$$

接著, 根據微積分基本定理並化簡整理 (自行驗證), 得

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx \\ &= \frac{x_2 - x_0}{6}\left[p(x_0) + 4p\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + p(x_2)\right]\end{aligned}$$

又

$$x_2 - x_0 = 2\Delta x = 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

且

$$\frac{x_0 + x_2}{2} = x_1$$

以及 $f(x)$ 與 $p(x)$ 共同過此三點, 故由上式, 得

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x_2} p(x)dx \\ &= \frac{b-a}{3n}[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)] \\ &= \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \qquad (2)\end{aligned}$$

最後, 根據 (1) 式與 (2) 式, 得

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

同理，針對接著的兩個連續子區間 $[x_2, x_3]$ 與 $[x_3, x_4]$，得

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$\vdots$$

直至最後兩個連續子區間 $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ 與 $[x_{n-1}, x_n]$，得

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\
&\approx \frac{b-a}{3n}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]
\end{aligned}$$

將上述第一個連續二子區間的近似，直至最後一個 (第 $\frac{n}{2}$ 個，因爲 n 爲偶數) 連續二子區間的近似合併，並整理共用的端點，得

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + \\
&\qquad f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \cdots + \\
&\qquad\qquad f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \\
&\qquad 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]
\end{aligned}$$

註. 辛普森法則的係數型式為

$$1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 2, 4, 1$$

例 2. 試以 $n = 4$ 與 $n = 8$ 的辛普森法則估計定積分

$$\int_0^1 e^x dx$$

並與眞正的值比較.

<解> (1) $n = 4$. 四等分 $[0, 1]$, 得子區間長度

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

以及端點

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1$$

且對應的係數為

$$1,\ 4,\ 2,\ 4,\ 1$$

故由辛普森法則, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^x dx \\
&\approx \ \frac{1}{12}[e^0 + 4e^{0.25} + 2e^{0.5} + 4e^{0.75} + e^1] \\
&\approx \ 1.718319
\end{aligned}$$

比 $n = 4$ 的梯形法則好.

(2) $n = 8$. 八等分 $[0, 1]$, 得子區間長度

$$\Delta x = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$$

以及端點

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ 1$$

且對應的係數爲

$$1,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 1$$

因此, 根據辛普森法則, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^x dx \\
\approx\ & \frac{1}{24}[e^0 + 4e^{0.125} + 2e^{0.25} + 4e^{0.375} + \\
& \quad 2e^{0.5} + 4e^{0.625} + 2e^{0.75} + 4e^{0.875} + e^1] \\
\approx\ & 1.718284
\end{aligned}$$

比 $n = 8$ 的梯形法則好.

結論. 根據上述的例 1 與例 2, 得

(1) 當子區間個數 n 相同時, 辛普森法則比梯形法則好.

(2) 子區間個數 n 愈大, 愈準確.

問. 如何選取適當的子間個數 n, 而達到要求的準確度?

答. 可根據下述的誤差分析 (Error Analysis).

設 n 等分 $[a,b]$, 並以 E 表示誤差, 亦即,

$$E=\int_a^b f(x)dx - \text{估計值}$$

則梯形法則的

$$|E| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\left[\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|\right]$$

且辛普森法則的

$$|E| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}\left[\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\right]$$

由此可導出

(1) 子區間個數 n 愈大, $|E|$ 愈小, 故估計愈準確, 因爲 n 在上二式中的分母.

(2) 辛普森法則的 $|E|$ 小於梯形法則的 $|E|$, 故辛普森法則較梯形法則好, 因爲主要的因素爲上二式中, 辛普森法則的分母有 n^4, 遠大於梯形法則分母的 n^2.

與根據前二例所導出的結論一致.

例 3. 試在誤差小於 0.01 下, 以梯形法則估計

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

<解> 前二例都是在明確的子區間個數下, 以梯形法則或辛普森法則求估計值, 而此例並無給出明確的子區間個數, 僅要求誤差小於某一準確度 (如, 0.01) 即可, 故需根據前述的誤差分析, 先求出適當的子區間個數 n. 根據梯形法則的誤差公式

$$|E| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\left[\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|\right]$$

知, 子區間個數 n 滿足

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\left[\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|\right] < 0.01 \qquad (3)$$

即可導出

$$|E| < 0.01$$

符合題意的要求. 接著, 將 $a=0$ 與 $b=1$ 代入 (3) 式, 得 n 亦相當於滿足

$$\frac{1}{12n^2}\left[\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|\right] < 0.01 \tag{4}$$

所以需要求出

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|$$

以便解 n, 其中

$$f(x)=e^{-x^2}$$

假設已知

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right| = 2$$

請自行根據上學期求極值的方法驗證, 一個相當好的練習, 則由 (4) 式, 得 n 滿足

$$\frac{1}{12n^2}(2) < 0.01$$

即可. 經運算後, 亦相當於滿足

$$6n^2 > \frac{1}{0.01} = 100$$

接著, 可實際解上述的不等式, 或以嘗試的方式, 代 $n=4$, 得

$$6(4)^2 = 96 < 100$$

不合, 而代 $n = 5$, 得

$$6(5)^2 = 150 > 100$$

符合要求, 故取 $n = 5$ 即可.

接著, 五等分 $[0, 1]$, 得子區間長度

$$\Delta x = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$$

以及端點

$$0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1$$

並由梯形法則,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{-x^2}dx \\
&\approx \frac{1}{10}\left[\frac{1}{e^0} + \frac{2}{e^{0.04}} + \frac{2}{e^{0.16}} + \frac{2}{e^{0.36}} + \frac{2}{e^{0.64}} + \frac{1}{e}\right] \\
&\approx 0.744
\end{aligned}$$

且

$$|\text{誤差}| < 0.01$$