單元 13: 高階導函數
(課本 §2.6)

一. 高階導函數的定義

令函數

$$y = f(x)$$

則一階導函數 (1st derivative)

$$f'(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

亦可表示成

$$y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y]$$

二階導函數 (2nd derivative)

$$f''(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$$

亦可表示成

$$y'', \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], \quad D_x^2[y]$$

三階導函數 (3rd derivative)

$$f'''(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}[f''(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d^3y}{dx^3}$$

亦可表示成

$$y''', \quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)], \quad D_x^3[y]$$

$$\vdots$$

n 階導函數 (nth derivative)

$$f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right] = \frac{d^ny}{dx^n}$$

亦可表示成

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)], \quad D_x^n[y]$$

例 1. 令函數

$$g(t) = -t^4 + 2t^3 + t + 4$$

試求 $g'''(2)$.

<解> 需由一階導函數開始, 一階一階地求, 亦即,

$$g'(t) = -4t^3 + 6t^2 + 1$$

以及

$$g''(t) = -12t^2 + 12t$$

故

$$g'''(t) = -24t + 12$$

因此,

$$g'''(2) = -24(2) + 12 = -36$$

註. 繼續微分例 1 中的函數, 得

$$g^{(4)}(t) = -24 = -4! \quad (\text{乃一常數})$$

且

$$g^{(n)}(t) = 0, \ n \geq 5$$

可將此一結論推廣如下: 設 n 次多項式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

則 n 階導函數

$$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(1)a_n = n!a_n$$

且

$$p^{(m)}(x) = 0, \ m \geq n+1$$

例 2. 令函數

$$y = \frac{1}{x}$$

試求 y 的高階導函數.

<解> 首先, 經由改寫,

$$y = x^{-1}$$

故

$$y' = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

接著, 對 y' 微分, 得

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$$

再對 y'' 微分, 得

$$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$$

以此類推, 得

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} \\ &= \frac{(-1)^4 4!}{x^5} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

以及一般的 n 階導函數

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

二. 應用 (加速度)

設某物體的位置函數 (position function) 爲

$$s = f(t)$$

則此物體的速度 (velocity)

$$\begin{aligned} v(t) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{ds}{dt} = f'(t) \end{aligned}$$

乃度量此物體在瞬間的位置移動量, 且加速度 (acceleration)

$$\begin{aligned} a(t) &\overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}v(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t) \end{aligned}$$

乃度量此物體在瞬間的速度改變量, 爲位置函數的二階導函數.

例 2. 設一汽車由靜止狀態開始啓動, 其車速爲

$$v(t)=\frac{80t}{t+5},\ t\geq 0$$

其中距離的單位爲呎且時間的單位爲秒. 試求在頭一分鐘內, 每隔 10 秒的加速度.

<解> 根據定義, 此車的加速度

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{80(t+5)-80t(1)}{(t+5)^2} \\ &= \frac{400}{(t+5)^2} \end{aligned}$$

故在頭一分鐘內, 每隔 10 秒的速度與加速度如下表:

t (秒)	0	10	20	30
$v(t)$ (呎/秒)	0	53.3	64	68.6
$\frac{dv}{dt}$ (呎/秒^2)	16	1.78	0.64	0.33
t (秒)	40	50	60	
$v(t)$ (呎/秒)	71.1	72.7	73.8	$\rightarrow$ 平穩
$\frac{dv}{dt}$ (呎/秒^2)	0.20	0.13	0.09	$\rightarrow 0$

在加速中, 會明顯感受到加速度 (亦即, 速度對時間的變化率); 加速度由大變小, 至速度平穩時, 加速度亦趨近於 0, 與生活上的經驗相符.