1. 將 x 視爲常數, 對 y 微分, 並根據乘法規則以及對數函數的微分公式, 得

$$
\begin{aligned}
& f_y(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}[3xy^2]\cdot \ln(x-y) + 3xy^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}[\ln(x-y)] \\
&= 6xy\ln(x-y) + 3xy^2\left(\frac{1}{x-y}\right)(-1) \\
&= 6xy\ln(x-y) - \frac{3xy^2}{x-y}
\end{aligned}
$$

再將上式對 x 微分, 視 y 爲常數, 並根據乘法規則, 除法規則以及對數函數的微分公式, 得

$$
\begin{aligned}
f_{yx}(x,y) &= 6y\ln(x-y) + \frac{6xy}{x-y} \\
&\quad - \frac{3y^2(x-y) - 3xy^2(1)}{(x-y)^2} \\
&= 6y\ln(x-y) + \frac{6xy}{x-y} + \frac{3y^3}{(x-y)^2}
\end{aligned}
$$

2. 首先, 求臨界點, 相當於解

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y - x^3 = 0 && (1) \\
f_y(x,y) &= x - y^3 = 0 && (2)
\end{aligned}
$$

由 (1) 式, 得

$$y = x^3$$

代入 (2) 式, 得

$$x-(x^3)^3=x-x^9=x(1-x^8)=0$$

故,

$$x=-1,\ 0,1$$

對應的

$$y=(-1)^3=-1,\ 0^3=0,\ 1^3=1$$

以及三個臨界點

$$(-1,-1),\ (0,0),\ (1,1)$$

接著, 需根據二階偏導函數檢定法驗證. 由二階偏導函數

$$f_{xx}=-3x^2,\ f_{yy}=-3y^2,\ f_{xy}=1$$

得判別式

$$\begin{aligned} d(x,y) &= f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2 \\ &= (-3x^2)(-3y^2)-1^2 \\ &= 9x^2y^2-1 \end{aligned}$$

代入臨界點 $(-1,-1)$, 得

$$d(-1,-1)=9(-1)^2(-1)^2-1=8>0$$

又

$$f_{xx}(-1,-1) = -3(-1)^2 = -3 < 0$$

圖形下凹, 故在 $(-1,-1)$ 有相對最大值

$$f(-1,-1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

代入臨界點 (0,0), 得

$$d(0,0) = 9(0)^2(0)^2 - 1 = -1 < 0$$

故在 $(0,0)$ 無相對極值,

$$(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$$

爲一鞍點.

代入臨界點 $(1,1)$, 得

$$d(1,1) = 9(1)^2(1)^2 - 1 = 8 > 0$$

又

$$f_{xx}(1,1) = -3(1)^2 = -3 < 0$$

圖形下凹, 故在 $(1,1)$ 有另一個相對最大值

$$f(1,1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$