

## 單元 59: 級數與收斂

(課本 §10.2)

以一個熟悉的例子開始, 將  $\frac{1}{3}$  表成小數, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0.3333\dots \\ &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}\end{aligned}$$

因爲是一個無窮多項的和, 故稱作無窮級數 (infinite series), 其中的符號  $\sum$  稱作累加符號 (sigma notation), 可簡潔地表示一個無窮項數的和。

問. 何謂無窮級數? 如何求無窮級數的值?

定義. 無窮級數乃一個無窮多項的和

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

可採用累加符號

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

簡潔地表示.

令第一項的和

$$S_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_1$$

前兩項的和

$$S_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2$$

前三項的和

$$S_3 \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3$$

以及類推的前  $n$  項的和

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

稱作第  $n$  個部份和 ( $n$ th partial sum, 或  $n$  項和), 由此可得一數列

$$\{S_1, S_2, S_3, \dots\} = \{S_n\}$$

並定義

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

亦即, 無窮級數的值等於此無窮級數  $n$  項和的極限. 若此數列  $\{S_n\}$  的極限存在, 則稱無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收斂; 否

則, 稱無窮級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  發散.

註. 無窮級數中的足標 (index)  $n$ , 不一定要像定義, 從 1 開始, 如

$$a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n$$

與

$$b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

亦稱作無窮級數.

例 1. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

<解> 首先, 需要求  $n$  項和  $S_n$ , 根據定義並化簡, 得

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

接著，根據一個常用的公式

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

並經由化簡，以及 (1) 式，得  $n$  項和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

最後，根據無窮級數的值的定義，以及上述求得的前  $n$  項和  $S_n$ ，無窮級數

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\infty} = 1 \end{aligned}$$

收斂。

(b) 首先，前  $n$  項和

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ 項}} = n$$

故，無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

發散.

性質. 設二無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$$

與

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

均收斂，則

**(1)** 常數乘積的無窮級數等於無窮級數的常數乘積，

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cA$$

亦即，可將乘積常數由累加符號內提出。

**(2)** 和或差的無窮級數等於無窮級數的和或差，

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$$

亦即, 可先求出各個無窮級數的值, 再做對應的和或差.

與有限項和一樣的性質.

例 2. 試求下列各項無窮級數的值.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

<解> (a) 根據性質 1, 將乘積常數  $-1$  由累加符號內提出, 並由例 1 (a) 小題的結果, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n} &= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= (-1)(1) = -1 \end{aligned}$$

(b) 首先, 由性質 2, 差的無窮級數等於無窮級數的差, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

接著，將第二個級數的一般項改寫為

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

並根據性質 1，提出乘積常數，以及例 1 (a) 小題的結果，由上式得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

給定一無窮級數，通常會考慮下列二問題，

(1) 此級數收斂或發散？

(2) 若收斂，此級數的值為何？

一. 先探討一個判斷發散的方法.

判斷發散的一般項檢定法：給定一級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

則級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  發散.

註. 當一般項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

時, 無法下結論, 亦即, 此級數可能收斂也可能發散, 需要進一步探討, 切記, 勿在沒有其他充分的理由下, 判斷此級數為收斂或發散, 這是初學者常犯的一個錯誤. 因此, 只有在一項的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

時, 才可判斷級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  發散.

例 3. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$



$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$$

<解> (a) 先嘗試判斷發散的一般項檢定法. 根據計算在無窮遠極限的典型作法, 將分子分母同除  $n$ , 並經由化簡整理以及代入法, 得一般項的極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

故發散.

(b) 首先計算一般項的極限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

**無法下結論.** 但由例 1 的 (a) 小題知, 前  $n$  項和  $S_n$  的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

故, 根據級數的值等於前  $n$  項和的極限以及收斂發散的定義, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

收斂.

(c) 將分子分母同除  $n!$ , 並經由化簡整理以及代入法, 得一般項的極限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2n! + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n!}} \\ &= \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2} \neq 0\end{aligned}$$

故, 此級數發散.

二. 不同類型的級數, 有不同的求值方法, 如下述.

首先探討等比級數. 型如

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

的級數, 稱作公比為  $r$ , 首項為  $a$  的等比級數.

當公比  $r \neq 1$  時, 經由化簡整理以及例 1 (a) 小題的常用公式, 此等比級數的前  $n$  項和

$$\begin{aligned}S_n &= a + ar + \cdots + ar^{n-1} \\ &= a(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \\ &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}\end{aligned}\tag{2}$$

再根據另一個常用的結論，當  $|r| < 1$  時，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

且當  $|r| > 1$  時，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \pm\infty$$

亦即，無界地遞增或無界地震盪地不存在，以及計算極限的法則，當公比的絕對值  $|r| < 1$  時，由 (2) 式，前  $n$  項和的極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{a}{1 - r} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^n\right) \\ &= \frac{a}{1 - r} (1 - 0) \\ &= \frac{a}{1 - r} \end{aligned} \tag{3}$$

同理，當公比的絕對值  $|r| > 1$  時，前  $n$  項和的極限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{a}{1 - r} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^n\right) \\ &= \frac{a}{1 - r} (1 - \pm\infty) \\ &= \pm\infty \end{aligned} \tag{4}$$

亦即，無界地遞增，或遞減，或無界地震盪地不存在。

當公比  $r = 1$  時, 此等比級數的前  $n$  項和

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 項}} = na$$

故, 前  $n$  項和的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = a \cdot \infty = \pm\infty \quad (5)$$

亦即, 無界地遞增或遞減地不存在.

最後, 當公比  $r = -1$  時, 此等比級數的前  $n$  項和

$$\begin{aligned} S_n &= a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a \\ &= \begin{cases} a, & n \text{ 爲奇數} \\ 0, & n \text{ 爲偶數} \end{cases} \end{aligned}$$

故, 前  $n$  項和的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ 在 } a \text{ 與 } 0 \text{ 交替震盪地不存在} \quad (6)$$

因此, 合併 (3)-(6) 式, 並根據級數的值以及收斂發散的定義, 等比級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{若 } |r| < 1, \\ \text{發散}, & \text{若 } |r| \geq 1. \end{cases}$$

註. 當公比的絕對值  $|r| < 1$  時, 上式等比級數的值的公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

是由  $n = 0$  開始的; 若  $n$  不是由 0 開始, 則需做適當地調整, 或辨識出首項, 根據過去高中學過的公式

$$\sum_{n=\text{某整數}}^{\infty} ar^n = \frac{\text{首項}}{1-r}$$

求值.

例 4. 試判斷下列各級數為收斂或發散.

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$

<解> (a) 根據辨識, 原式爲一等比級數, 且由  $n = 0$  開始, 以及首項爲 3, 公比的絕對值

$$|r| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

故根據等比級數的公式, 並經由化簡整理, 得等比級數

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left( -\frac{1}{2} \right)^n &= \frac{3}{1 - \left( -\frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{3}{3/2} = 2 \end{aligned}$$

收斂.

(b) 經由辨識, 原式爲一等比級數, 且公比的絕對值

$$|r| = \left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} > 1$$

故根據等比級數的公式, 此等比級數發散.

(c) 首先, 經由辨識, 原式爲一等比級數, 且公比

$$r = \frac{1}{3} < 1$$

故此等比級數收斂.

接著, 求此收斂的等比級數的值. 因爲此收斂的等比級數是由  $n = 1$  開始, 不是由  $n = 0$  開始, 故須先經由加

上  $n = 0$  所對應的項，並減去加上的項的調整，再根據等比級數求值的公式，以及  $a = 4$ ,  $r = \frac{1}{3}$ ，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot \frac{1}{3^n} - 4 \cdot \frac{1}{3^0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 4 \\ &= \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} - 4 \\ &= \frac{4}{2/3} - 4 = 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

或根據上述註解的一般性公式，代入

$$\text{首項} = \frac{4}{3^1} = \frac{4}{3}$$

以及公比

$$r = \frac{1}{3}$$

後，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1 - 1/3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

**例 5.** 設一球自高度為 6 的地方落下後，繼續地往上彈

回與落下, 且每次彈回的高度是前一次落下高度的  $\frac{3}{4}$  倍, 如圖示. 試問此球上下跳動所經過的距離總和是多少?

<解> 根據圖示, 令  $D_1$  為第一次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_1 = 6$$

令  $D_2$  為第二次接觸地面時, 所經過的距離, 則根據題意, 彈回的高度為前一次的  $\frac{3}{4}$ , 且落下後才接觸地面, 得

$$D_2 = \underbrace{6 \left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{上}} + \underbrace{6 \left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{下}} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)$$

同理, 令  $D_3$  為第三次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_3 = 6 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right) + 6 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

⋮

以此類推, 令  $D_n$  為第  $n$  次接觸地面時, 所經過的距離, 則

$$D_n = 6 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 6 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

⋮



因此，在此球持續不斷地彈回與落下後，所經過的距離總和為

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n = 6 + \sum_{n=2}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad (7)$$

其中等號右邊第二項乃是一個

$$\text{首項} = 12 \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} = 12 \left(\frac{3}{4}\right) = 9$$

且公比

$$r = \frac{3}{4} < 1$$

的等比級數，故收斂，且根據等比級數的值的公式，由(7)式，得

$$\begin{aligned} \text{距離總和} &= 6 + \frac{9}{1 - 3/4} \\ &= 6 + 9 \cdot 4 = 42 \end{aligned}$$

或經由足標變換以及從  $n = 0$  開始的公式，經由足標調整後，並代入

$$a = 12$$

以及公比

$$r = \frac{3}{4}$$

由 (7) 式得

$$\begin{aligned}\text{距離總和} &= 6 + \sum_{n=1}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= 6 + \sum_{n=0}^{\infty} 12 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 12 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 6 + \frac{12}{1 - 3/4} - 12 \\ &= 6 + 48 - 12 = 42\end{aligned}$$