單元 45: 多變數函數
(課本 §7.3)

目前僅探討雙變數函數, 三個或三個以上變數的函數可類似地推廣.

一. 雙變數函數

雙變數函數

$$f(x,y): D(\text{定義域}) \to R(\text{值域})$$

是一個由平面中的區域 D 到實數線上的區域 R 的一種指派, 且符合單變數函數的指派規則, 如圖示. 令

$$z = f(x,y)$$

稱作 $f(x,y)$ 的 z-值, 則 $f(x,y)$ 的定義域 (domain)

$$D = \{\text{所有使得 } f(x,y) \text{ 有意義的點 } (x,y)\}$$

且 $f(x,y)$ 的值域 (range)

$$R = \{\text{所有 } f(x,y) \text{ 的 } z\text{-值}\}$$

例如, 令

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

且

$$g(x,y) = e^{x+y}$$

以及

$$h(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

則 $f(x,y)$ 的定義域 D 爲整個平面, 因爲將平面上的所有的點 (x,y) 代入 $f(x,y)$ 都有意義, 且值域 R 爲

$$-\infty < z < \infty$$

如圖示; 且 $g(x,y)$ 的定義域 D 爲整個平面, 值域 R 爲

$$z > 0$$

因爲指數函數恆爲正, 如圖示; 以及 $h(x,y)$ 的定義域 D 爲

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

一圓心爲 $(0,0)$, 半徑爲 2 的圓碟, 因爲使得 $h(x,y)$ 有意義, 乃相當於

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

亦即,

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

且值域 R 爲

$$0 \leq z \leq \sqrt{4} = 2$$

如圖示.

二. 雙變數函數的圖形

雙變數函數 $f(x,y)$ 的圖形為滿足 $z = f(x,y)$ 的所有點 (x,y,z) 所形成的集合.

例如, 函數

$$h(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

的圖形為滿足

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

的點集合, 經由兩邊平方並整理, 亦相當於

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \ z \geq 0$$

故為一個以 $(0,0,0)$ 為球心, 半徑為 4 的上半球, 如圖示.

三. 等高線圖 (contour map)

雙變數函數的圖形為三維空間中的點集合, 有時在視覺上不易整體地體會出, 或繪出, 但可透過下述的等高線圖對整個圖形有較具體的認識.

雙變數函數 $z = f(x, y)$ 的等高線圖為平行於 xy-平面的曲面截線的投影曲線圖，每一投影曲線又稱為一等高曲線 (level curve).

例如，若

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

則 $z = 0$, 1, 2, 3, 4 的等高線圖如下. 首先，$z = 0$ 的等高曲線為

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$$

亦相當於

$$x^2 + y^2 = 16$$

乃一圓心為 $(0, 0)$，半徑為 4 的圓，表示在此圓上的每一點的 z-值 (高度) 均為 0;

同理，$z = 1$ 的等高曲線為

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 1$$

亦相當於

$$x^2 + y^2 = 15$$

乃一圓心為 $(0, 0)$，半徑為 $\sqrt{15}$ 的圓，表示在此圓上的每一點的 z-值 (高度) 均為 1;

$z = 2$ 的等高曲線爲

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 2$$

亦相當於

$$x^2 + y^2 = 12$$

乃一圓心爲 $(0, 0)$, 半徑爲 $\sqrt{12}$ 的圓, 表示在此圓上的每一點的 z-值 (高度) 均爲 2;

$z = 3$ 的等高曲線爲

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 3$$

亦相當於

$$x^2 + y^2 = 7$$

乃一圓心爲 $(0, 0)$, 半徑爲 $\sqrt{7}$ 的圓, 表示在此圓上的每一點的 z-值 (高度) 均爲 3;

最後, $z = 4$ 的等高曲線爲

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 4$$

亦相當於

$$x^2 + y^2 = 0$$

僅爲一個單點 $(0, 0)$, 表示在此點的 z-值 (高度) 爲 4;

將上述求得的等高曲線繪出, 得等高線圖 (contour map), 乃五個大小不同的同心圓, 隨著高度 (z-值) 的增加, 對應出逐漸變小的半徑, 如圖示. 由此等高線圖可對原函數的圖形, 從等高的角度有部分的認知.

四. Cobb-Douglas 產量函數

產量 (production level) 爲

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

的函數稱作 Cobb-Douglas 產量函數, 其中 C 爲一常數, $0 < a < 1$ 爲另一常數, 且 x 爲勞力財 (labor) 的數量, 以及 y 爲資本財 (capital) 的數量.

例 1. 設某產品的產量爲

$$f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$$

根據上述的定義, 此乃一 Cobb-Douglas 產量函數.

(a) 當勞力財 $x = 1000$ 單位, 且資本財 $y = 500$ 單位時, 產量爲

$$\begin{aligned} f(100, 500) &= 100(1000)^{0.6}(500)^{0.4} \\ &\approx 75786 \text{ (件)} \end{aligned}$$

(b) 當勞力財 $x = 2000$ 單位, 且資本財 $y = 1000$ 單位, 亦即, 均為 (a) 中的二倍時, 產量為

$$\begin{aligned}
&f(2000, 1000)\\
&= 100(2000)^{0.6}(1000)^{0.4}\\
&= 100 \cdot 2^{0.6}(1000)^{0.6} \cdot 2^{0.4} \cdot (500)^{0.4}\\
&= 2^{0.6+0.4} \cdot 100(1000)^{0.6}(500)^{0.4}\\
&= 2f(1000, 500)\\
&\approx 151572 \text{ (件)}
\end{aligned}$$

(c) 當勞力財與資本材均增為 (a) 中的三倍時, 產量為

$$\begin{aligned}
&f(3000, 1500)\\
&= 100(3 \cdot 1000)^{0.6}(3 \cdot 500)^{0.4}\\
&= 3^{0.6} \cdot 3^{0.4} \cdot 100(1000)^{0.6}(500)^{0.4}\\
&= 3 \cdot 100(1000)^{0.6}(500)^{0.4}\\
&= 3f(1000, 500)
\end{aligned}$$