

單元 37: 代入法

(課本 §6.1)

一. 複習

一些學過的基本公式, 如下述.

(1) 常數法則: 若 k 為一常數, 則

$$\int k dx = kx + C$$

(2) 冪次法則: 若 $n \neq -1$ 且 u 為 x 的可微函數, 則簡單型為

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

以及廣義型為

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

(3) 指數法則: 若 u 為 x 的可微函數, 則簡單型為

$$\int e^x dx = e^x + C$$

且廣義型為

$$\int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C$$

(4) 對數法則: 若 u 為 x 的可微函數, 則簡單型為

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

且廣義型為

$$\int \frac{1}{u} \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$$

二. 解答積分問題的步驟為

(1) 記憶上述的基本公式.

(2) 以適當的技巧將原來的被積函數 (integrand) 改寫成能用的公式.

註. 積分不像微分, 單由函數的型式就可確定出該使用的法則, 而是一種型式轉換的技巧, 需先將原函數改寫成適

當的型式後，才能確定出可使用的法則，既然是一種技巧，就要經由多練習而熟練之，此乃不二門法。

三. 第一個積分技巧：代入法（上學期已學過，相當於形式辨識法，目的在於複習，以預備其它技巧的學習），過程如下述。

- (1) 令 u 為被積函數的一部份。
- (2) 解 x 與 dx 。
- (3) 根據 (1) 與 (2) 將原式改寫成 u 與 du 的型式，並形成可適用的公式。
- (4) 將 u 反代回由 (3) 所求出的反導函數，並以 x 為變數作答。

例 1. 試求下列各項積分。

(a)
$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$(b) \int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$$

$$(c) \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$$

<解> (a) 根據經驗, 通常選取 u 為被積函數中合成函數部分的內部函數, 而顯然地, 合成函數為 $(x + 1)^{-2}$, 故一個嘗試為, 令

$$u = x + 1$$

則

$$du = (x + 1)' dx = dx$$

且

$$x = u - 1$$

接著, 代入, 經由整理, 並根據對數法則以及冪次法則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{u - 1}{u^2} du \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - u^{-2} \right) du \\ &= \ln |u| + \frac{1}{u} + C \\ &= \ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號乃是將 u 反代入, 把所得的積分表成 x 的數學式.

(b) 顯然地, 被積函數中的合成函數為 $\sqrt{x^3 - 1}$, 故令

$$u = x^3 - 1$$

得

$$du = (x^3 - 1)' dx = 3x^2 dx$$

接著, 經由同乘除 3 的改寫, 根據型式辨識法或代入法以及幕次法則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{3} \int \sqrt{x^3 - 1} \cdot 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{9} (x^3 - 1)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(c) 因為是一個分式且分子與分母都含有相同的指數函數, 一個經常的嘗試為, 令分母為 u , 並經由改寫後, 以對數法則積分, 亦即, 令

$$u = 1 + e^{2x}$$

並由此導出

$$du = (1 + e^{2x})' dx = 2e^{2x} dx$$

故，經由同乘除 2 的改寫，並根據型式辨識法或代入法，以及對數法則，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot 2e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為

$$u = 1 + e^{2x} > 0$$

故可去絕對值所致。

例 2. 試求下列各項定積分。

(a) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$

(b) $\int_0^{0.875} \frac{28}{9} x \sqrt[3]{1-x} dx$

<解> (a) 顯然地, 被積函數中的合成函數為 $\sqrt{2x-1}$, 故可嘗試令

$$u = 2x - 1$$

得

$$du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

以及

$$x = \frac{1}{2}(u + 1)$$

另將對 x 的積分範圍換成對 u 的積分範圍:

$$x = 1 \Rightarrow u = 2(1) - 1 = 1$$

$$x = 5 \Rightarrow u = 2(5) - 1 = 9$$

最後, 根據代入法, 幕次法則以及微積分基本定理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}(u+1) \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{4} \int_1^9 (u^{1/2} + u^{-1/2}) du \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} + 2u^{1/2} \right]_1^9 \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2}{3} + 2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[22 - \frac{2}{3} \right] = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(b) 明顯地, 被積函數中的合成函數部分為 $\sqrt[3]{1-x}$, 故令

$$u = 1 - x$$

得

$$du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

以及

$$x = 1 - u$$

另對應出的 u 的積分範圍為

$$x = 0 \Rightarrow u = 1 - 0 = 1$$

$$x = 0.875 \Rightarrow u = 1 - 0.875 = 0.125$$

因此, 根據代入法, 冪次法則以及為積分基本定理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^{0.125} \frac{28}{9} \cdot (1-u) \cdot \sqrt[3]{u} \cdot (-du) \\ &= \frac{28}{9} \int_1^{0.125} (u^{4/3} - u^{1/3}) du \\ &= \frac{28}{9} \left[\frac{3}{7} u^{7/3} - \frac{3}{4} u^{4/3} \right]_1^{0.125} \\ &= \frac{28}{3} \left[\left(\frac{1}{7} (0.5)^7 - \frac{1}{4} (0.5)^4 \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) \right] \\ &\approx 0.865 \end{aligned}$$

其中第四個等號成立乃因為

$$(0.125)^{1/3} = 0.5$$

所致.