單元 36: 旋轉體的體積
(課本 §5.7)

一. 旋轉體的形成

設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上爲非負. 令 R 爲 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所圍成的區域, 如圖示.

接著, 將區域 R 繞 x-軸旋轉, 可得一實體 S, 並稱此實體爲旋轉體 (solid of revolution), 以及 x-軸爲旋轉軸 (axis of revolution), 如圖示.

二. 旋轉體的體積

可根據下述的圓碟法 (disc method) 求旋轉體 S 的體積.

(1) n 等分 $[a,b]$, 得子區間的寬 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, 並對於 $i = 1, \ldots, n$, 令 x_i 爲第 i 個子區間內的一點.

(2) 對於 $i = 1, \ldots, n$, 分別以 $f(x_i)$ 爲高, Δx 爲寬, 形成 n 個長方條.

(3) 將此 n 個長方條繞 x-軸旋轉, 得 n 個圓碟, 且對於 $i = 1, \ldots, n$, 第 i 個圓碟的體積爲

$$\pi f^2(x_i)\Delta x$$

如圖示.

(4) 根據圖示, 得

$$\begin{aligned} & S \text{ 的體積} \\ & \quad \approx \quad n \text{ 個圓碟的體積和} \\ & \quad = \quad \pi[f^2(x_1) + \cdots + f^2(x_n)]\Delta x \qquad (1) \end{aligned}$$

剛好爲函數 $\pi f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼和.

因此, 根據前單元所述的事實: f 在 $[a, b]$ 上的定積分就是 f 在 $[a, b]$ 上的黎曼和的極限, 亦即,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

由圖示以及 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \lim_{n\to\infty} \pi[f^2(x_1) + \cdots + f^2(x_n)]\Delta x \\ &= \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2) \end{aligned}$$

註. 根據圖示, 可視 $f(x)$ 爲旋轉半徑, dx 爲圓碟厚度, 故

$$\pi f^2(x)dx$$

就爲一個圓碟的體積. 因此將這些薄圓碟的體積累加, 並取極限, 即可得

$$S \text{ 的體積} = \pi \int_a^b (\text{旋轉半徑})^2 dx$$

一個與直觀相符的公式. 其它許多積分的公式也都有此種現象, 方便於了解及記憶.

例 1. 令 R 爲

$$f(x) = -x^2 + x$$

與 x-軸所圍出的區域, 且 S 爲 R 繞 x-軸所得出的旋轉體. 試求 S 的體積.

<解> (i) 求交點決定積分上下界以及圍出的區域 R. 因爲 x-軸乃相當於 $y = 0$, 故令

$$-x^2 + x = 0$$

並解 x. 經由因式分解, 得

$$x(-x + 1) = 0$$

故

$$x = 0,\ 1$$

根據求得的二個交點, 以及一爲開口向下的拋物線, 另一爲 x-軸, 得圍出的區域 R, 如圖示.

(ii) 因爲繞 x-軸, 故根據圖示, 得

$$\text{旋轉半徑: } f(x) = -x^2 + x$$

因此, 由 (2) 式以及微積分基本定理,

$$\begin{aligned}
S \text{ 的體積} &= \pi \int_0^1 (-x^2 + x)^2 dx \\
&= \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\
&= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{30}
\end{aligned}$$

推廣 1. 若函數 $x = f(y)$ 在 $[c, d]$ 上爲非負, 亦即, 自變數爲 y, 定義域乃 y-軸上的閉區間 $[c, d]$, 且圖形在 y-軸的右邊 .

令 R 為 $f(y)$ 在 $[c, d]$ 上所圍出的區域, 且 S 為 R 繞 y-軸後所得的旋轉體, 如圖示.

接著, n 等分 $[c, d]$, 得子區間的長度 $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, 並且對於 $i = 1, \ldots, n$, 以第 i 個子區間中任何一點 y_i 的函數值 $f(y_i)$ 為高, 子區間長度 Δy 為寬, 形成 n 個長方條, 經由繞 y-軸後, 得第 i 個薄圓碟的體積為

$$\pi f^2(y_i)\Delta y$$

因此, 經由黎曼和的極限過程, 得

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \lim_{n\to\infty} \pi[f^2(y_1) + \cdots + f^2(y_n)]\Delta y \\ &= \pi \int_c^d f^2(y)dy \qquad (3) \end{aligned}$$

注意, 繞 y-軸時, 需將半徑表成 y 的函數, 並對 y 積分.

例 2. 令 R 為

$$y = x^2$$

與

$$y = 4$$

在第一象限內所圍出的區域, 且 S 為 R 繞 y-軸所得的旋轉體. 試求旋轉體 S 的體積.

<解> 二函數, 一爲開口向上的拋物線, 一爲水平線, 故得第一象限內所圍出的區域 R, 如圖示. 因爲是繞 y-軸旋轉, 故需將 R 的右邊界

$$y = x^2,\ x \geq 0$$

表成 y 的函數, 並由上邊界

$$y = 4$$

得 R 爲

$$x = \sqrt{y}$$

在 $[0, 4]$ 上所圍成的區域.

因此, 根據圖示, 得

$$\text{旋轉半徑: } x = \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq 4$$

且由 (3) 式以及微積分基本定理,

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \pi \int_0^4 [\sqrt{y}]^2\, dy \\ &= \pi \int_0^4 y dy \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} y^2\right)\Big|_0^4 = 8\pi \end{aligned}$$

推廣 2. 洗衣機法 (washer method)

設在閉區間 $[a,b]$ 上, 函數 f 與 g 均連續, 非負, 且 $f(x) \geq g(x)$.

令 R 爲 f 與 g 在 $[a,b]$ 上所圍出的區域.

將 R 繞 x-軸, 得一中空的旋轉體 S, 如圖所示.

經由 n 等分 $[a,b]$, 以及旋轉組成 R 的第 i 個長方條, 得一中空的薄圓碟, 如圖示, 且體積爲

$$\pi[f^2(x_i) - g^2(x_i)]\Delta x$$

最後, 經由黎曼和的極限過程, 得中空旋轉體

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \lim_{n\to\infty} \pi\{[f^2(x_1) - g^2(x_1)] + \cdots + \\ &\qquad [f^2(x_n) - g^2(x_n)]\}\Delta x \\ &= \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx \end{aligned}$$

或根據幾何的觀點, 上述的圓碟法, 以及積分的加減法則, 得中空的旋轉體

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \text{外部大的旋轉體體積} - \\ &\qquad \text{內部小的旋轉體體積} \\ &= \pi \int_a^b f^2(x)dx - \pi \int_a^b g^2(x)dx \\ &= \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx \end{aligned}$$

註. 經由直觀, 累加的角度, 中空薄圓碟的體積爲

$$\pi[(\text{外半徑})^2 - (\text{內半徑})^2]dx$$

故中空旋轉體

$$S \text{ 的體積} = \pi\int_a^b [(\text{外半徑})^2 - (\text{內半徑})^2]dx \qquad (4)$$

切勿犯如下的錯誤, 中空旋轉體

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &\neq \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \\ &\neq \int_a^b [\text{外半徑} - \text{內半徑}]^2 dx \end{aligned}$$

例 3. 令 R 爲

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

與

$$g(x) = 3$$

所圍出的區域, 且 S 爲 R 繞 x-軸而得的旋轉體. 試求 S 的體積.

<解> (i) 求交點決定積分上下界以及圍出的區域 R. 令

$$\sqrt{25 - x^2} = 3$$

並解 x. 經由兩邊平方, 得

$$25 - x^2 = 9$$

亦相當於

$$x^2 = 16$$

故

$$x = -4,\ 4$$

又二函數的圖形, 一為圓心 $(0,0)$, 半徑 5 的上半圓, 另一為水平線, 並根據上述求得的二交點的 x 作標, 得所圍出的區域 R, 如圖示.

(ii) 決定旋轉半徑. 因為是繞 x-軸, 而得的中空旋轉體, 故由圖示, 得

$$\text{外半徑: } f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

以及

$$\text{內半徑: } g(x) = 3$$

因此, 根據洗衣機法, 亦即, (4) 式, 得中空旋轉體

$$\begin{aligned} S \text{ 的體積} &= \pi \int_{-4}^{4} [(\text{外半徑})^2 - (\text{內半徑})^2] dx \\ &= \pi \int_{-4}^{4} \left[\left(\sqrt{25 - x^2} \right)^2 - 3^2 \right] dx \end{aligned}$$

再根據微積分基本定理, 由上式得

$$
\begin{aligned}
S \text{ 的體積} &= \pi\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx \\
&= \pi\left(16x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-4}^{4} \\
&= \pi\left[\left(64-\frac{64}{3}\right)-\left(-64+\frac{64}{3}\right)\right] \\
&= \pi\left(\frac{128}{3}+\frac{128}{3}\right)=\frac{256}{3}\pi
\end{aligned}
$$

或因爲被積函數爲一偶函數, 故根據微積分基本定理, 以及偶函數的定積分性質, 由上式得

$$
\begin{aligned}
S \text{ 的體積} &= \pi\int_{-4}^{4}(16-x^2)dx \\
&= 2\pi\int_{0}^{4}(16-x^2)dx \\
&= 2\pi\left(16x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{4} \\
&= 2\pi\left(64-\frac{64}{3}\right)=\frac{256}{3}\pi
\end{aligned}
$$