# 單元 30: 反導函數與不定積分
(課本 §5.1)

## 一. 微分與反微分

微分 (differentiation) 乃是給定一函數 $f$, 求導函數 $f'$, 例如, (1) 給定函數

$$f(x) = x^3$$

得導函數

$$f'(x) = 3x^2$$

(2) 給定函數

$$g(x) = e^{-x}$$

得導函數

$$g'(x) = -e^{-x}$$

(3) 給定函數

$$h(x) = \ln x, \ x > 0$$

得導函數

$$h'(x) = \frac{1}{x}, \ x > 0$$

反微分 (antidifferentiation) 乃是給定一導函數 $f'$, 求函數 $f$, 亦即, 找一函數 $f$, 使其導函數等於給定的 $f'$, 如圖示. 例如, (1) 給定導函數

$$f'(x) = 3x^2$$

問函數 $f(x)$ 爲何 ? 因爲

$$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

如給定的導函數, 故函數

$$f(x) = x^3$$

(2) 給定導函數

$$g'(x) = -e^{-x}$$

問函數 $g(x)$ 爲何? 因爲

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}] = -e^{-x}$$

如給定的導函數, 故函數

$$g(x) = e^{-x}$$

(3) 給定導函數

$$h'(x) = \frac{1}{x}, \;\; x > 0$$

問函數 $h(x)$ 爲何? 因爲

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x},\ x > 0$$

如給定的導函數, 故函數

$$h(x) = \ln x,\ x > 0$$

**註.** 對任一常數 $C$, 根據加減及常數的微分法則,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^3 + C] &= \frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[C] \\ &= 3x^2 + 0 = 3x^2\end{aligned}$$

如給定的導函數 $f'(x)$. 所以,

$$x^3 + C$$

也是對 $f'(x)$ 做反微分 (antidifferentiation) 過程中的一個解. 由此可知, 反微分所得到的不是單一函數 (a single function), 而是一函數家族 (a family of functions), 各成員間只差一個常數. 例如,

$$\ln x + 5,\ \ln x + (-1),\ \ln x + 10,\ \ldots$$

都是求

$$h'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

的反微分過程中的解, 而可將它們一致地表示成

$$h(x) = \ln x + C$$

此乃表示一函數家族, 此家族中的每一函數均稱作 $h'(x)$ 的一個反導函數 (antiderivative).

定義. 給定一函數 $f$, 若存在一函數 $F$ 使得, 對 $f$ 定義域中的每一個 $x$,

$$F'(x) = f(x)$$

則稱 $F$ 爲 $f$ 的一個反導函數.

符號表示法. (1) 反微分 (antidifferentiation) 又稱作積分 (integration), 並以積分符號

$$\int$$

表示. 因此, 求 $f$ 的反導函數乃相當於求 $f$ 的積分, 也就是說,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \text{求 } f \text{ 的反導函數} \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

若對所有 $f$ 定義域中的 $x$,

$$F'(x) = f(x)$$

(2) 反微分

$$\int f(x)dx$$

又稱作不定積分 (indefinite integral), 其解

$$F(x)+C$$

爲一反導函數家族, 亦即,

$$F'(x)=f(x)$$

故其中的 $C$, 稱作積分常數, 不可省略, 否則僅得出此家族中的一個成員, 而不是整個家族. 又

$$\int$$

稱作積分符號 (integral sign)

$$f(x)$$

稱作被積函數 (integrand)

$$dx$$

乃微分差 (differential), 其中的 $x$ 表示積分變數, 明確地說明是求 $f$ 對 $x$ 的反導函數, 如圖示.

例如, 不定積分

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

且不定積分

$$\int -e^{-x}dx = e^{-x} + C$$

以及不定積分

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C,\ \ x > 0$$

(3) 根據微分與不定積分 (或稱反微分) 的定義,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

且

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

由此導出, 微分與積分互為相反運算, 亦即, 互逆運算.

二. 積分法則

根據不定積分或反微分的定義以及微分法則, 得基本積分法則, 如下述.

(1) 常數法則: 設 $k$ 為一常數, 則

$$\int kdx = kx + C$$

因爲根據常數的微分法則, 得

$$\frac{d}{dx}[kx] = k$$

故得證.

(2) 純量乘積法則: 設 $k$ 爲一常數, 則

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

因爲根據純量乘積的微分法則以及微分與積分互逆, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right] &= k\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]\\ &= kf(x)\end{aligned}$$

故得證.

(3) 加減法則:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

因爲根據加減的微分法則以及微分與積分互逆, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]\\ &= \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] \pm \frac{d}{dx}\left[\int g(x)dx\right]\\ &= f(x) \pm g(x)\end{aligned}$$

故得證.

(4) 簡單冪次法則: 對於 $n \neq -1$,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

因爲根據微分的純量乘積法則以及簡單冪次法則, 當 $n \neq -1$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right] &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}[x^{n+1}] \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n \\ &= x^n \end{aligned}$$

故得證.

註. 積分的簡單冪次法則不適用於 $n = -1$, 因爲此時的分母 $n+1$ 爲 0, 無意義; 事實上, 當 $n = -1$ 時, 積分法則爲

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

其中 $x > 0$ 的部分, 如前述的例子, 因爲

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

故得證; 至於 $x < 0$ 的部分, 以後證明.

例 1. 試求下列各項不定積分.

**(a)** $\int \frac{1}{x^3} dx$

**(b)** $\int \sqrt{x} dx$

**(c)** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

<解> 關鍵乃在於, 設法將被積函數改寫成 $kx^n$ 的組合型式, 再根據上述的積分法則求不定積分, 如下述.

(a) 首先將被積函數改寫成 $x^{-3}$, 再根據簡單冪次法則, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3} dx &= \int x^{-3} dx \\ &= \frac{1}{-2} x^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

(b) 經由改寫被積函數以及簡單冪次法則, 得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}dx &= \int x^{1/2}dx \\ &= \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} + C\end{aligned}$$

(c) 因爲分母只有一項, 故先根據分配律將被積函數改寫, 再根據積分的加減法則, 逐項積分, 以及簡單冪次法則, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx &= \int (x^{1/2} - x^{-1/2})dx \\ &= \int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + C\end{aligned}$$

例 2. 試求

$$f'(x) = 2x - 2$$

的一般解 (general solution), 亦即, 求 $f(x)$ 滿足

$$f'(x) = 2x - 2$$

若

$$f(1) = 2$$

稱作初值條件 (initial condition), 試問在此條件下,

$$f'(x) = 2x - 2$$

的解爲何?

註. 滿足初值條件的解稱爲特殊解 (particular solution).

<解> 根據一般解及不定積分的定義, 求一般解乃相當於求 $f(x)$ 滿足

$$f'(x) = 2x - 2$$

亦即, 求

$$f'(x) = 2x - 2$$

的不定積分, 故一般解爲

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2x-2)dx \\ &= x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

將初值

$$f(1) = 2$$

代入, 得

$$1^2 - 2(1) + C = 2$$

故,

$$C = 3$$

因此, 特殊解爲

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

例 3. 設在離地面 80 呎處以初速 64 (呎/秒) 垂直向上拋出一球, 如圖示. (a) 試求此求的位置函數 $S(t)$. 設重力加速度

$$S''(t) = -32 \text{ (呎/秒}^2\text{)}$$

(b) 試問何時此球會擊中地面?

<解> 已知將位置函數 $S(t)$ 對時間 $t$ 微分, 得速度 $S'(t)$; 將速度 $S'(t)$ 對時間 $t$ 微分, 得加速度 $S''(t)$, 如圖示, 故由積分與微分的互逆, 經第一個積分, 得速度

$$\begin{aligned} S'(t) &= \int S''(t)dt \\ &= \int -32dt = -32t + C_1 \end{aligned}$$

代初值條件

$$\text{初速} = S'(0) = 64$$

得

$$-32(0) + C_1 = 64$$

故,

$$C_1 = 64$$

因此, 速度

$$S'(t) = -32t + 64$$

經由第二個積分, 得位置函數

$$\begin{aligned} S(t) &= \int S'(t)dt \\ &= \int (-32t + 64)dt \\ &= -16t^2 + 64t + C_2 \end{aligned}$$

代初值條件

$$S(0) = 80$$

得

$$-16(0^2) + 64(0) + C_2 = 80$$

故,

$$C_2 = 80$$

因此, 位置函數

$$S(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

(b) 球擊中地面乃相當於

$$S(t) = 0$$

亦即,

$$-16t^2 + 64t + 80 = 0$$

因式分解, 得

$$-16(t-5)(t+1) = 0$$

故,

$$t = 5,\ -1(\text{不合})$$

因此, 5 秒後, 球擊中地面.

又問球擊重地面的速度爲何?

此乃相當於 $t = 5$ 秒時的速度, 故球擊中地面時的速度爲

$$\begin{aligned} S'(5) &= -32(5) + 64 \\ &= -160 + 64 \\ &= -96\ (\text{呎}/\text{秒}^2) \end{aligned}$$

其中的負號乃表示方向向下.