單元 22: 最佳化 (第二部分)
(課本 §4.5)

前一單元欲最佳化的量均爲給定的函數, 稱作目標函數 (objective function), 如利潤函數, 平均成本函數, 氣管空氣流速函數及火箭飛行高度函數等. 一般而言, 需先根據所要探討的問題, 將欲最佳化的量表成適當的函數, 再根據函數的性質, 以適當的方法求所需的絕對極值. 有如下的

解最佳化問題指引

1. 針對欲探討問題中相關的量均設定變數. 若需要, 輔以圖形.

2. 將欲最佳化的量表成數學式.

3. 根據所探討問題的條件, 將欲最佳化的量表成單變數函數 f, 並根據實際情境確定 f 的定義域.

4. 根據前一單元的方法在定義域內最佳化 f, 如在有限界閉區間上最佳化連續函數, 則採用比較法; 否則採用一階或二階導函數檢定法.

以例說明如下.

例 1. 今以 50 呎長的柵欄欲圍出一矩形花園. 試求可得最大面積花園的尺寸.

<解> 令 x 與 y 爲此花園二鄰邊的長度且 A 爲面積, 則

$$A = xy$$

如圖示. 因爲柵欄總長爲 50 呎, 得限制條件

$$2x + 2y = 50$$

解 y, 得

$$y = 25 - x$$

代入, 得目標函數

$$A(x) = x(25 - x) = -x^2 + 25x$$

因爲 x 與 y 爲邊長, 故

$$x \geq 0 \text{ 且 } 25 - x \geq 0$$

即

$$0 \leq x \leq 25$$

因此, 原問題等價於最大化

$$A(x) = -x^2 + 25x,\ 0 \le x \le 25$$

接著, 對 x 微分, 得

$$A'(x) = -2x + 25$$

恆連續, 故令 $A' = 0$, 得臨界數

$$x = \frac{25}{2} = 12.5 \in (0, 25)$$

最後, 計算並比較 A 在臨界數及端點的值, 得

$$A(0) = 0(25) = 0$$

與

$$A(12.5) = 12.5(25 - 12.5) = 156.25$$

以及

$$A(25) = 25(0) = 0$$

因此, 當

$$x = 12.5 \text{ 且 } y = 25 - 12.5 = 12.5$$

即圍成正方形花園時, 有最大花園面積 156.25 呎^2.

註. 一定要驗證, 這樣才能確定得到欲求的絕對最大值或絕對最小值. 除了比較法外, 亦可採用一階導函數檢定法, 如計算 A' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(0, 12.5)$: $A' = (+)$, A 遞增

$(12.5, 25)$: $A' = (-)$, A 遞減

如圖示. 因此, 在 $x = 12.5$ 有相對最大面積, 亦爲絕對最大面積, 如所求.

或再對 x 微分, 得

$$A'' = -2 < 0,\ 0 < x < 25$$

恆下凹, 如圖示. 故根據二階導函數檢定法, 在水平切線處, 即 $x = 12.5$, 有絕對最大面積, 如所求.

例 2. 將一長 16 吋, 寬 10 吋的硬紙板截去相同正方形的四角並摺成一開口盒 (open box). 試求可得最大體積的尺寸.

<解> 令 x 爲截掉正方形的邊長且 V 爲開口盒的體積, 則

$$\begin{aligned} V &= (16 - 2x)(10 - 2x)x \\ &= 4(8 - x)(5 - x)x = 4(x^3 - 13x^2 + 40x) \end{aligned}$$

因爲長寬高均爲非負, 即

$$16 - 2x \geq 0,\ 10 - 2x \geq 0,\ x \geq 0$$

得

$$0 \leq x \leq 5$$

因此, 原問題等價於最大化

$$V(x) = 4(x^3 - 13x^2 + 40x),\ 0 \leq x \leq 5$$

接著, 對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(3x^2 - 26x + 40) \\ &= 4(x-2)(3x-20) \end{aligned}$$

恆連續, 故令 $V' = 0$, 得臨界數 $x = 2$ 與 $x = \frac{20}{3}$ (不考慮, 因爲不在 $(0, 5)$ 內). 最後, 計算並比較 V 在臨界數與端點的值, 得

$$V(0) = 16(10)(0) = 0$$

與

$$V(2) = (16-4)(10-4)(2) = 144$$

以及

$$V(5) = (16-10)(10-10)(5) = 0$$

因此, 當 $x = 2$, 即尺寸爲 $12 \times 6 \times 2$ 時, 有最大面積 144 吋^3.

註. 亦可以一階導函數檢定法驗證, 即計算 V' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(0,2)$: $V' = (-)(-) = (+)$, V 遞增

$(2,5)$: $V' = (+)(-) = (-)$, V 遞減

如圖示. 因此, 在 $x = 2$ 有絕對最大體積, 如所求. 但不易以二階導函數檢定法驗證, 因爲 V 不恆下凹, 請自行練習.

例 3. 當票價爲 \$3 時, 某城市平均每日搭乘捷運的乘客爲 6000 人. 又票價每漲 \$0.50, 平均每日乘客數會減少 1000 人. 試求可獲得最大收益的票價.

<解> 設 p 爲票價且 x 爲乘客數, 則收益

$$R = xp$$

接著, 由題意, 當 $p = 3$ 時, $x = 6000$ 且 $p = 3.5$ 時 $x = 5000$, 即 p 與 x 的關係式爲過點 $(6000, 3)$ 與 $(5000, 3.5)$ 的直線. 由此得斜率

$$m = \frac{3.5 - 3}{5000 - 6000} = -\frac{0.5}{1000} = -0.0005$$

故由點斜式,

$$p - 3 = -0.0005(x - 6000) \qquad (1)$$

即

$$p = -0.0005x + 6$$

代入, 將 R 表成 x 的函數, 得

$$R = xp = -0.0005x^2 + 6x$$

因爲票價與乘客數均爲非負, 即

$$p = -0.0005x + 6 \geq 0 \text{ 且 } x \geq 0$$

得

$$0 \leq x \leq \frac{6}{0.0005} = 6(2000) = 12,000$$

因此, 原問題等價於最大化

$$R(x) = -0.0005x^2 + 6x,\ 0 \leq x \leq 12,000$$

接著, 對 x 微分, 得

$$R'(x) = -0.001x + 6$$

恆連續, 故令 $R' = 0$, 得臨界數

$$x = \frac{6}{0.001} = 6000 \in (0, 12,000)$$

最後, 計算並比較 R 在臨界數與端點的值, 得

$$R(0) = 0(6) = 0$$

與

$$R(6000) = 6000(3) = 18,000$$

與

$$R(12,000) = 12,000(0) = 0$$

因此, 當乘客數 $x = 6000$, 即票價 $p = 3$ 時, 可得最大收益 \$18,000.

<另解> 亦可將 R 直接表成票價 p 的函數, 即由 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} x &= 6000 - \frac{1}{0.0005}(p-3) \\ &= 6000 - 2000(p-3) \\ &= -2000p + 12,000 \end{aligned}$$

代入, 得

$$R = px = -2000p^2 + 12,000p$$

又票價與乘客數均非負, 即

$$p \geq 0 \text{ 且 } x = -2000p + 12,000 \geq 0$$

得

$$0 \leq p \leq 6$$

因此, 原問題等價於最大化

$$R(p) = -2000p^2 + 12,000p, \ 0 \le p \le 6$$

接著, 對 p 微分, 得

$$R'(p) = -4000p + 12,000$$

恆連續, 故令 $R' = 0$, 得臨界數

$$p = \frac{12,000}{4000} = 3 \in (0, 6)$$

最後, 計算並比較 R 在臨界數與端點的值, 得

$$R(0) = 0(12,000) = 0$$

與

$$R(3) = 3(6000) = 18,000$$

以及

$$R(6) = 6(0) = 0$$

因此, 當票價爲 \$3 時, 可得最大收益 \$18,000.

註. 亦可以二階導函數檢定法驗證, 即再對 x 微分, 得

$$R''(x) = -0.01 < 0, \ 0 \le x \le 12,000$$

恆下凹, 如圖示. 故在水平切線處, 即 $x = 6000$ 且對應的 $p = 3$ 時, 有最大收益, 如所求.

或再對 p 微分, 得

$$P''(p) = -4000 < 0,\ 0 \le p \le 6$$

恆下凹, 如圖示. 故在水平切線處, 即 $p = 3$, 有最大收益, 如所求.

例 4. 今欲設計一容量爲 54 吋^3 的正圓柱鋁製容器. 試求使用最少材料的半徑與高度.

<解> 設此容器的半徑爲 r 且高爲 h, 則表面積

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

如圖示. 因爲容量爲 54 吋^3, 故得

$$\pi r^2 h = 54$$

解 h, 得

$$h = \frac{54}{\pi r^2} \tag{2}$$

代入, 得

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{54}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{108}{r}$$

又半徑 $r > 0$. 因此, 原問題等價於最小化

$$S = 2\pi r^2 + \frac{108}{r},\ r > 0$$

接著, 對 r 微分並化簡, 得

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{108}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 108}{r^2},\ r > 0$$

恆連續, 故令 $S' = 0$, 得

$$r = \sqrt[3]{\frac{108}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{27}{\pi}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2$$

最後, 再對 r 微分, 得

$$S''(r) = 4\pi + \frac{216}{r^3} > 0,\ r > 0$$

恆上凹, 如圖示. 故根據二階導函數檢定法, 在水平切線處, 即 $r = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ 時, 使用的材料最少. 代入 (2) 式, 得對應的高度

$$h = \frac{54}{\pi r^2} = \frac{54}{\pi\left(\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{54\pi^{2/3}}{\pi(9)} = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r$$

因此, 當高度是半徑的二倍, 即半徑約 2 吋且高約 4 吋時, 使用的材料最少.

公司的訂貨數量需夠大以滿足消費需求, 但會造成高的庫存費用 (storage cost), 然而減少訂貨數量雖會降低庫存費用, 但卻會增加訂貨次數而提高訂貨成本 (reordering cost). 如何求得適當的訂貨數量與訂貨次

數而降低總成本是一個值得探討的所謂庫存問題 (inventory problem), 如

例 5. 設某品牌的摩托車一年的需求量爲 10,000 台且以均勻銷售率售出. 又每批的訂貨費用爲 \$10,000 且每輛摩托車的年庫存費爲 \$200. 試問每次的訂貨數量與全部的訂貨次數爲何時, 可得最低的訂貨與庫存總成本?

<解> 設 x 爲每次的訂貨數量且每批貨物到達的時間就是前批貨物售完的時刻, 如圖示. 因此, 根據均勻銷售率及這批貨物到達即上批貨物售完的時刻, 平均而言, 一年需要庫存的摩托車數量爲 $\frac{x}{2}$, 得一年的庫存成本爲

$$200\left(\frac{x}{2}\right)=100x$$

又訂貨次數爲

$$\frac{10,000}{x}$$

故一年的訂貨成本爲

$$10,000\left(\frac{10,000}{x}\right)=\frac{100,000,000}{x}$$

另由題意,

$$0<x\leq 10,000$$

因此, 原問題等價於最小化一年的總成本

$$C(x) = 100x + \frac{10^8}{x},\ 0 < x \leq 10,000$$

接著, 對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} C'(x) &= 100 - \frac{10^8}{x^2} \\ &= \frac{100x^2 - 10^8}{x^2},\ 0 < x < 10,000 \end{aligned}$$

恆連續, 故令 $C' = 0$, 即

$$x^2 = 1,000,000$$

得臨界數 $x = 1000$ 與 $x = -1000$ (不合, 因爲不在 $(0, 10,000)$ 內). 最後, 再對 x 微分, 得

$$C''(x) = \frac{200,000,000}{x^3} > 0,\ 0 < x < 10,000$$

恆上凹, 如圖示. 故在水平切線處, 即訂貨量 $x = 1000$ 且對應的訂貨次數爲

$$\frac{10,000}{1000} = 10$$

時, 有最小總成本.

例 6. 核廢料需存放在一鉛製且厚度爲 6 吋的正圓柱容器內, 如圖示. 若外圓柱的體積爲 16π 呎^3, 試求可得最大內圓柱容量的內圓柱半徑與高度.

<解> 設內圓柱的半徑爲 r 且高度爲 h, 則內圓柱的體積

$$V = \pi r^2 h$$

今以呎作爲計算單位, 並在一呎等於 12 吋的換算下, 由題意, 外圓柱的體積爲

$$\pi \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 (h+1) = 16\pi$$

解 h, 得

$$h = \frac{16}{\left(r + \frac{1}{2}\right)^2} - 1$$

又半徑與高度均爲非負, 即

$$r \geq 0 \text{ 且 } \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 16$$

得

$$0 \leq r \leq 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

因此, 代入, 得原問題等價於最大化

$$V(r) = \pi r^2 \left[\frac{16}{\left(r + \frac{1}{2}\right)^2} - 1\right], \; 0 \leq r \leq \frac{7}{2}$$

接著, 根據乘法規則與連鎖規則並化簡, 得

$$
\begin{aligned}
V'(r) &= 2\pi r\left[\frac{16}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}-1\right]-\frac{32\pi r^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}\\
&= 2\pi r\left[\frac{16}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2}-1-\frac{16r}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}\right]\\
&= 2\pi r\left[\frac{16\left(r+\frac{1}{2}\right)-\left(r+\frac{1}{2}\right)^3-16r}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}\right]\\
&= 2\pi r\left[\frac{8-\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}\right]
\end{aligned}
$$

恆連續, 故令 $V'=0$, 即

$$\left(r+\frac{1}{2}\right)^3=8$$

得臨界數

$$r=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\in\left(0,\frac{7}{2}\right)$$

最後, 計算並比較 V 在臨界數與端點的值, 得

$$V(0)=\pi(0)^2(64-1)=0$$

與

$$V\left(\frac{3}{2}\right)=\pi\left(\frac{9}{4}\right)\left[\frac{16}{4}-1\right]=\frac{27}{4}\pi$$

以及

$$V\left(\frac{7}{2}\right)=\pi\left(\frac{49}{4}\right)\left[\frac{16}{16}-1\right]=0$$

因此, 當半徑 $r=\frac{3}{2}$ 呎且高

$$h=\frac{16}{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}-1=4-1=3 \text{ 呎}$$

時, 有最大內圓柱容量 $\frac{27}{4}\pi$ 呎^3.

註. 亦可計算 V' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$\left(0,\frac{3}{2}\right)$: $V'=(+)\frac{(+)}{(+)}=(+)$, V 遞增

$\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$: $V'=(+)\frac{(-)}{(+)}=(-)$, V 遞減

如圖示, 故根據一階導函數檢定法, 在 $r=\frac{3}{2}$ 有絕對最大內圓柱容量, 如所求. 但不易以二階導函數檢定法驗證, 因爲 V 不恆下凹, 請自行練習.