單元 1: 二階導函數的應用
(課本 §4.2)

函數 f 在 (a,b) 上遞增可能以遞增的步調增加, 即增加的速度加劇; 也可能以遞減的步調增加, 即增加的速度趨緩, 如圖示. 同理, 函數 f 在 (a,b) 上遞減可能以遞減的步調減少, 即減少的速度加劇; 也可能以遞增的步調減少, 即減少的速度趨緩, 如圖示. 可透過函數的二階導函數探討變化率 ($f'>0$, 遞增; $f'<0$, 遞減) 加劇或趨緩所呈現出的函數圖形的凹性, 並進而求得函數圖形上產生凹性改變的反曲點.

一. 凹性 (concavity)

定義. 令函數 f 在 (a,b) 上可微. 1. 若 f' 在 (a,b) 上遞增, 則稱 f 在 (a,b) 上凹 (concave upward).

2. 若 f' 在 (a,b) 上遞減, 則稱 f 在 (a,b) 下凹 (concave downward).

3. 函數 f 在 $x=c$ 上凹若存在一含 c 的 (a,b) 使得 f 在 (a,b) 上凹. 同理, 函數 f 在 $x=c$ 下凹若存在一含 c 的 (a,b) 使得 f 在 (a,b) 下凹, 如圖示.

由幾何的角度, 一曲線上凹表示此曲線位在切線上方; 一曲線下凹表示此曲線位在切線下方, 如圖示.

設函數 f 的二階導函數 f'' 存在. 由於 f'' 表示過 f 圖形上點 $(x, f(x))$ 的切線斜率 (即 f 的變化率) 的變化率, 故在 (a, b) 上, 若

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) > 0$$

則 f 圖形上每一點的切線斜率 (即 f 的變化率) f' 在 (a, b) 上是遞增的, 因而根據凹性的定義, f 在 (a, b) 上凹. 同理, 若在 (a, b) 上

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) < 0$$

則 f' 在 (a, b) 上遞減, 因而 f 在 (a, b) 下凹. 綜合上述, 得

定理. 1. 若對 (a, b) 中的任意 x, $f''(x) > 0$, 則 f 在 (a, b) 上凹. 2. 若對 (a, b) 中的任意 x, $f''(x) < 0$, 則 f 在 (a, b) 下凹.

類似於判斷函數單調性的過程 (即以 f'' 取代 f'), 得

判斷函數凹性的步驟

1. 求出所有使得 $f'' = 0$ 或 f'' 不連續的 x 值, 並根據這些 x 值分割實數線 (更明確地說, 分割 f 的定義域).

2. 針對步驟 1 所分割的每一開區間, 任選其中一數 c 並計算 $f''(c)$ 的符號.

(a) 若 $f''(c) > 0$, 則 f' 在此區間遞增, 故 f 在此區間上凹.

(b) 若 $f''(c) < 0$, 則 f' 在此區間遞減, 故 f 在此區間下凹.

例 1. 試判斷函數

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

的凹性.

<解> 將 f 對 x 微分兩次並化簡, 得

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

以及

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

且 f'' 恆連續. 故令 $f''(x) = 0$, 得 $x = 1$ 並將實數線分割成二個子區間.

接著, 計算 f'' 在每個子區間的符號, 得

$(-\infty, 1)$: $f'' = (-)$, f 下凹

$(1, \infty)$: $f'' = (+)$, f 上凹

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty, 1)$ 下凹且在 $(1, \infty)$ 上凹.

例 2. 試判斷函數

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

的凹性.

<解> 經由二次微分並化簡, 得

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

及

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

故 f'' 恆不為 0 且在 $x = 0$ 不連續.

接著, 計算 f'' 在此點 $x=0$ 所分割出的二個子區間上的符號, 得

$(-\infty,0)$: $f''=\frac{(+)}{(-)}=(-)$, f 下凹

$(0,\infty)$: $f''=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, f 上凹

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty,0)$ 下凹且在 $(0,\infty)$ 上凹.

例 3. 試判斷 $f(x)=x^{2/3}$ 的凹性.

<解> 經由二次微分並化簡, 得

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}$$

及

$$f''(x)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=-\frac{2}{9x^{4/3}}$$

故 f'' 恆不為 0 且在 $x=0$ 不連續.

接著, 計算 f'' 在此點所分割出的二子區間上的符號, 得

$(-\infty,0)$: $f''=(-)\frac{(+)}{(+)}=(-)$, f 下凹

$(0,\infty)$: $f''=(-)\frac{(+)}{(+)}=(-)$, f 下凹

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty,0)$ 與 $(0,\infty)$ 均下凹, 即恆下凹.

註. 類似於判斷單調性的情況, f'' 未變號, 也就是說, 經過 $f''=0$ 或 f'' 不連續的 x 的值時, f'' 不一定會變號, 務必確實計算 f'' 在每個子區間的符號.

二. 反曲點 (inflection points)

設某汽車空調製造商的營業額 S 與廣告費用 x 的關係式爲

$$S(x)=-0.01x^3+1.5x^2+200,\ 0\le x\le 100$$

如圖示, 顯示出此連續函數圖形的凹性在點 $(50,2700)$ 由上凹變爲下凹, 且稱此種在其左右凹性改變 (由上凹變爲下凹或由下凹變爲上凹) 的點爲反曲點, 所代表的意義爲, 剛開始, 營業額相當緩慢地成長, 但隨著廣告費用的更多投入, 營業額大幅快速地成長, 反應出廣告的效果. 然而, 經過反曲點後, 額外的廣告費用依然促使營業額成長, 但卻以較小幅度, 緩慢地成長, 故此種反曲點 (由上凹變

爲下凹) 又常稱作報酬衰退點 (point of diminishing returns). 爲了探討這種凹性改變的點, 有如下的

定義. 連續函數 f 的圖形上切線存在且凹性改變的點稱作反曲點 (inflection point).

一個現象是, 函數的圖形在反曲點會穿過切線, 如圖示.

類似於求相對極值的過程 (即將 f' 換成 f''), 得

求反曲點的步驟. 設 f 爲連續函數.

1. 計算 f''.

2. 求 f 的定義域內使得 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 不存在的 x 值, 稱作反曲候選數 (candidates of inflection points).

3. 計算步驟 2 中每一數 (反曲後選數) $x = c$ 左右的符號. 若過 $x = c$ 時, $f''(x)$ 變號 (即由正變負或由負變正), 則 $(c, f(c))$ 爲一反曲點, 否則 $(c, f(c))$ 不是反曲點.

註. 函數 f 的反曲點只可能發生在 f 的定義域內使得 $f''=0$ 或 f'' 不存在的 x 值 (故稱作反曲後選數)，且需進一步確認，如 $f(x)=x^4$，則

$$f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2 \text{ 且 } f''(0)=0$$

但過 $x=0$ 時，f'' 恆正，未變號，故

$$(0,f(0))=(0,0)$$

不是反曲點，如圖示. 又如 $g(x)=x^{2/3}$，則

$$g'(x)=\frac{2}{3x^{1/3}},\quad g''(x)=-\frac{2}{9x^{4/3}}$$

且 g'' 在 $x=0$ 不存在. 但過 $x=0$ 時，g'' 恆負，未變號，故

$$(0,g(0))=(0,0)$$

不是反曲點，如圖示.

例 4. 試判斷函數

$$f(x)=(x-1)^{5/3}$$

的凹性並求反曲點.

<解> 1. 找反曲候選數. 經由二次微分並化簡，得

$$f'(x)=\frac{5}{3}(x-1)^{2/3}$$

以及

$$f''(x) = \frac{10}{9}(x-1)^{-1/3} = \frac{10}{9(x-1)^{1/3}}$$

故 f'' 恆不爲 0 (因爲分子不爲 0) 且 f'' 不存在等價於分母

$$9(x-1)^{1/3} = 0$$

得唯一的反曲候選數 $x = 1$.

2. 驗證. 計算 f'' 在分割出的二子區間上的符號, 得

$(-\infty, 1)$: $f'' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, f 下凹

$(1, \infty)$: $f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f 上凹

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty, 1)$ 上凹, 在 $(1, \infty)$ 下凹且過 $x = 1$ 時, 凹性改變, 故得反曲點

$$(1, f(1)) = (1, 0)$$

例 5. 試判斷函數

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

的凹性並求反曲點.

<解> 1. 找反曲候選數. 首先, 根據連鎖規則並化簡, 得

$$f'(x) = -(x^2+1)^{-2}(2x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

再根據除法規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(x^2+1)[-2(x^2+1)+8x^2]}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

故 f'' 恆連續 (恆存在) 因爲分母恆正, 不爲 0. 又 $f''=0$ 等價於分子

$$3x^2 - 1 = 0$$

得 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 與 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 驗證. 計算 f'' 在分割出的二子區間上的符號, 得

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f 上凹

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, f 下凹

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$: $f''=\frac{(+)}{(+)}=(+)$, f 上凹

如圖示. 因此, f 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 與 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$ 上凹且在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 下凹. 又過 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 與 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 時, f'' 均變號, 故得二反曲點

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$$

與

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{3}{4}\right)$$

例 6. 試根據下述函數 f 的性質:

$$f(-1)=4,\ f(0)=2,\ f(1)=0,$$

與

$$f'(-1)=0,\ f'(1)=0$$

以及

$$(-\infty,-1)\cup(1,\infty): f'>0;\ (-1,1): f'<0$$

與

$$(-\infty,0): f''<0;\ (0,\infty): f''>0$$

描繪出函數的圖形.

<解> 1. 遞增, 遞減性與相對極值. 由

$$f'(-1) = 0 \text{ 與 } f'(1) = 0$$

得二臨界數 $x = -1$ 與 $x = 1$, 並根據 f' 在此二數分割出的三個子區間上的符號, 得 f' 的符號圖, 如圖示. 因此, f 在點 $(-1, 4)$ 有相對極大值且在點 $(1, 0)$ 有相對極小值.

2. 求凹性及反曲點. 由題意, 得 f'' 的符號圖, 如圖示, 也就是說, 過 $x = 0$ 時, f'' 變號, 故點 $(0, 2)$ 爲一反曲點.

3. 描點與連結. 標示上述求得的相對極值及反曲點並將 f' 的符號圖置於 x-軸上方, f'' 的符號圖置於 x-軸下方且依序在每個子區間上根據 f 的遞增, 遞減性及凹性以平滑曲線連結標示的點而繪出函數 f 的圖形, 如圖示.

例 7. 設某經濟體的消費者物價指數 (CPI) 爲

$$I(t) = -0.2t^3 + 3t^2 + 100, \; 0 \le t \le 10$$

其中 $t = 0$ 對應於 2000 年年初. 試求並解釋函數 I 的反曲點.

<解> 將函數 I 對 t 微分兩次並化簡, 得

$$I'(t) = -0.6t^2 + 6t = -0.6t(t-10)$$

以及

$$I''(t) = -1.2t + 6 = -1.2(t-5)$$

故 I'' 連續且令 $I'' = 0$ 得唯一的反曲候選數 $t = 5$. 接著, 計算 I'' 在分割的二個子區間上的符號, 得

$(0,5)$: $I'' = (-)(-) = (+)$, I 上凹

$(5,10)$: $I'' = (-)(+) = (-)$, I 下凹

如圖示, 即過 $t = 5$ 時, I'' 變號, 故得反曲點

$$(5, I(5)) = (5, -25 + 75 + 100) = (5, 150)$$

因爲 I'' 度量 CPI 的變化率

$$I' > 0,\ 0 \leq t \leq 10$$

的變化率 (變化程度), 故消費者物價指數大幅增加至 $t = 5$ 後, 幅度趨緩, 也就是說, 通貨膨脹率 $t = 5$ 時最高, 並由 2005 年年初後開始舒緩.

三. 二階導函數檢定法

如圖示, 函數 f 在 $x=c$ 有一相對極大值且過點 $(c,f(c))$ 有一水平切線以及下凹, 即

$$f'(c)=0 \text{ 且 } f''(c)<0$$

同理, 函數 f 在 $x=c$ 有一相對極小值且過點 $(c,f(c))$ 有一水平切線以及上凹, 即

$$f'(c)=0 \text{ 且 } f''(c)>0$$

當二階導函數 f'' 存在時, 由上述結論得另類判斷相對極值的

二階導函數檢定法 (second derivative test). 設 f 爲連續函數. 找相對極值的步驟爲

1. 計算 $f'(x)$ 與 $f''(x)$.

2. 求所有使得 $f'(x)=0$ 的臨界數.

3. 針對步驟 2 中的每一臨界數 c, 計算 $f''(c)$.

(a) 若 $f''(c)<0$, 則 f 在 $x=c$ 下凹, 故得相對極大值 $f(c)$, 如圖示.

(b) 若 $f''(c) > 0$, 則 f 在 $x = c$ 上凹, 故得相對極小值 $f(c)$, 如圖示.

(c) 若 $f''(c) = 0$, 無法判斷.

註. 若 $f'(c) = 0$ 但 $f''(c) = 0$ 或 $f''(c)$ 不存在時, 二階導函數檢定法無法判斷, 例如

$$f(x) = x^4,\ g(x) = -x^4,\ h(x) = x^3$$

則

$$f'(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ h'(0) = 0$$

且

$$f''(0) = 0,\ g''(0) = 0,\ h''(0) = 0$$

但在臨界數 $x = 0$, f 有相對極小值, g 有相對極大值且 h 無相對極值, 如圖示, 意即在臨界數的二階導函數爲 0 時, 有各種可能性而無法判斷.

又如,

$$f(x) = x^{4/3},\ g(x) = -x^{4/3},\ h(x) = x^{5/3}$$

則

$$f'(0) = 0,\ g'(0) = 0,\ h'(0) = 0$$

且

$$f''(0) \text{ 不存在}, \ g''(0) \text{ 不存在}, \ h''(0) \text{ 不存在}$$

但在臨界數 $x=0$, f 有相對極小值, g 有相對極大值且 h 無相對極值, 如圖示, 即在臨界數的二階導函數不存在時, 有各種可能性而無法判斷.

此外, 對於 $f'(x)$ 不存在的臨界數, 二階導函數亦無法判斷, 例如

$$f(x)=x^{2/3}, \ g(x)=-x^{2/3}, \ h(x)=x^{1/3}$$

則

$$f'(0) \text{ 不存在}, \ g'(0) \text{ 不存在}, \ h'(0) \text{ 不存在}$$

但在臨界數 $x=0$, f 有相對極小值, g 有相對極大值且 h 無相對極值, 如圖示, 即不可使用二階導函數判斷一階導函數不存在的臨界數.

上述乃強調, 二階導函數檢定法有限制 (只能判斷 $f'=0$ 的臨界數) 且有盲點 (當 $f''=0$ 或 f'' 不存在時, 無法判斷). 此時需採用無限制亦無盲點的一階導函數檢定法. 請自行練習, 以一階導函數確認上述例子的結論.

例 8. 試以二階導函數檢定法求函數

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x-4$$

的相對極值.

<解> 首先, 對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-12=6(x^2+x-2) \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

恆連續, 故令 $f'=0$ 得二臨界數 $x=-2$ 與 $x=1$.

接著, 再對 x 微分並化簡, 得

$$f''(x)=12x+6=6(2x+1)$$

代 $x=-2$, 得

$$f''(-2)=6(-3)=-18<0, f \text{ 下凹}$$

如圖示, 故根據二階導函數檢定法, f 在 $x=-2$ 有相對極大值

$$f(-2)=-16+12+24-4=16$$

代 $x=1$, 得

$$f''(1)=6(3)=18>0, f \text{ 上凹}$$

如圖示, 故根據二階導函數檢定法, f 在 $x=1$ 有相對極小值

$$f(1)=2+3-12-4=-11$$

註. 由一階導函數 f' 可探討 f 的遞增, 遞減性並求相對極值.

由二階導函數 f'' 可探討 f 的凹性並求反曲點.

四種單調性與凹性的組合及對應的曲線爲

1. $f' > 0$, $f'' > 0$: f 遞增, 上凹

2. $f' > 0$, $f'' < 0$: f 遞增, 下凹

3. $f' < 0$, $f'' > 0$: f 遞減, 上凹

4. $f' < 0$, $f'' < 0$: f 遞減, 下凹

如圖示, 也就是說, 結合單調性與凹性就可明確地在每個子區間上描繪出曲線而得函數的圖形.