單元 18: 一階導函數的應用
(課本 §4.1)

透過函數一階導函數可探討函數的遞增, 遞減性並進而求函數的相對極值.

一. 函數的遞增, 遞減性 (單調性, monotonicity)

定義. 1. 函數 f 在 (a,b) 上遞增 (increasing) 若且唯若對 (a,b) 中的任意 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) < f(x_2)$$

如圖示.

2. 函數 f 在 (a,b) 上遞減 (decreasing) 若且唯若對 (a,b) 中任意的 $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) > f(x_2)$$

如圖示.

3. 函數 f 在 $x = c$ 遞增若且唯若存在一含 c 的區間 (a,b) 使得 f 在 (a,b) 上遞增. 同理, 函數 f 在 $x = c$ 遞減若且唯若存在一含 c 的區間 (a,b) 使得 f 在 (a,b) 上遞減, 如圖示.

若 f 在 $x = c$ 的導函數 $f'(c) > 0$, 則由導函數的變化率及切線斜率意義, f 在點 $(c, f(c))$ 的切線斜率或變化率爲正, 表示 f 在 $x = c$ 是遞增的, 如圖示. 同理, f 在 $x = c$ 的導函數 $f'(c) < 0$, 則 f 在點 $(c, f(c))$ 的切線斜率或變化率爲負, 表示 f 在 $x = c$ 是遞減的, 如圖示.

綜合上述觀察, 得

定理. (a) 若對 (a, b) 中的任意 x, $f'(x) > 0$, 則 f 在 (a, b) 上遞增.

(b) 若對 (a, b) 中的任意 x, $f'(x) < 0$, 則 f 在 (a, b) 上遞減.

(c) 若對 (a, b) 中的任意 x, $f'(x) = 0$, 則 f 在 (a, b) 上爲一常數.

問. 如何判斷函數 f 何時遞增, 何時遞減? 也就是說, 在哪個區間 f 是遞增, 哪個區間 f 是遞減?

答. 根據勘根定理, 若一連續函數在一區間上沒有根, 則此函數在此區間上不會變號, 即恆正或恆負; 否則在此區間內至少有一根而產生矛盾. 故可根據上述結論, 得

判斷函數遞增, 遞減性的步驟

1. 求出所有使得 $f' = 0$ 或 f' 不連續的 x 值, 並根據這些 x 值分割實數線.

2. 針對步驟 1 所分割的每一開區間, 任選其中一數 c 並求 $f'(c)$ 的符號.

(a) 若 $f'(c) > 0$, 則 f' 在此區間恆正, 故 f 在此區間遞增.

(b) 若 $f'(c) < 0$, 則 f' 在此區間恆負, 故 f 在此區間遞減.

例 1. 試判斷函數

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

的遞增, 遞減性.

<解> 根據上述步驟, 先對 x 微分並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 24 \\ &= 3(x^2 - 2x - 8) = 3(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

恆連續且二根為 $x = -2$ 與 $x = 4$ 並將實數線分割成三個子區間.

接著, 計算 f' 在每個子區間上的符號, 得

$(-\infty, -2)$: $f' = (-)(-) = (+)$, f 遞增

$(-2, 4)$: $f' = (+)(-) = (-)$, f 遞減

$(4, \infty)$: $f' = (+)(+)$, f 遞增

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty, -2)$ 與 $(4, \infty)$ 上遞增; 在 $(-2, 4)$ 上遞減.

例 2. 試判斷函數 $f = x^{2/3}$ 的遞增, 遞減性.

<解> 對 x 微分並化簡, 得

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

故 f' 恆不為 0 且 f' 在 $x = 0$ 不存在, 因而不連續, 並將實數線分割成二個子區間.

接著, 計算 f' 在每個子區間的符號, 得

$(-\infty, 0)$: $f' = \frac{(+)}{(-)} = (-)$, f 遞減

$(0, \infty)$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty, 0)$ 上遞減; 在 $(0, \infty)$ 上遞增.

例 3. 試判斷函數

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

的遞增, 遞減性.

<解> 首先, 對 x 微分並化簡, 得

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

因為 $f' = 0$ 相當於分子

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0$$

得二根 $x = -1$ 與 $x = 1$.

又 f' 不連續等價於分母

$$x^2 = 0$$

得 $x = 0$.

接著, 計算 f' 在此三點將實數線所分割的四個子區間上的符號, 得

$(-\infty, -1)$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

$(-1, 0)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

$(0, 1)$: $f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

$(1, \infty)$: $f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

如圖示. 因此, f 在 $(-\infty, -1)$ 與 $(1, \infty)$ 上遞增; 在 $(-1, 0)$ 與 $(0, 1)$ 上遞減.

註. 如上例, 經過 $x = 0$ 時, f' 未變號, 未呈現交替的現象, 也就是說, 經過 $f' = 0$ 或 f' 不連續的 x 值時, f' 不一定會變號, 故務必確實計算 f' 在每一子區間的符號.

二. 相對極值

定義. 1. 函數 f 在 $x = c$ 有相對極大值 (relative maximum) 若且唯若存在一含 c 的開區間 (a, b) 使得對所有 (a, b) 中的 x,

$$f(x) \leq f(c)$$

如圖示.

2. 函數 f 在 $x = c$ 有相對極小值 (relative minimum) 若且唯若存在一含 c 的開區間 (a, b) 使得對所有 (a, b) 中的 x,

$$f(x) \geq f(c)$$

如圖示.

3. 相對極大值與相對極小值統稱爲相對極值 (relative extremum).

問. 如何找相對極值? 如圖示, 若 f 在含 c 的 (a, b) 上可微且在 $x = c$ 有相對極大值, 則當 x 由 c 的左邊至右邊時, f 的圖形呈現遞增至點 $(c, f(c))$ 後, 再遞減的現象, 也就是說, 與 f 的圖形相切的切線斜率 $f'(x)$ 會由正變至負並在點 $(c, f(c))$ 有一水平切線, 故 $f'(c) = 0$. 同理, 如圖示, 若可微函數 f 在 $x = c$ 有相對極小值, 則 $f'(c) = 0$. 此乃可微函數的相對極值特

徵, 也就是說, 若可微函數 f 在 $x=c$ 有相對極值, 則 $f'(c)=0$.

註 1. 上述特徵的逆敘述不成立, 即若 $f'(c)=0$, 則 f 在 $x=c$ 不一定有相對極值, 如 $f(x)=x^3$, 則

$$f'(x)=3x^2 \text{ 且 } f'(0)=0$$

但 f 在 $x=0$ 沒有相對極值, 如圖示. 即 $f'(c)=0$ 僅是可微函數 f 在 $x=c$ 有相對極值的必要條件而不是充分條件, 只表示在 $x=c$ 可能有相對極值, 且在其它導函數存在但不爲 0 的地方不會有相對極值.

註 2. 另一可能產生相對極值的地方爲導函數 f' 不存在的地方, 如

$$f(x)=-|x| \text{ 與 } g(x)=x^{2/3}$$

則 f 與 g 的圖形在 $x=0$ 均有一轉角 (corner), 即 $f'(0)$ 與 $g'(0)$ 均不存在, 但 f 在 $x=0$ 有一相對極大值且 g 在 $x=0$ 有一相對極小值, 如圖示. 然而導函數不存在的地方並不保證會有相對極值, 如

$$h(x)=x^{1/3}$$

則

$$h'(x)=\frac{1}{3x^{2/3}},\ x\neq 0 \quad \text{但 } h'(0) \text{ 不存在}$$

且 h 在 $x=0$ 沒有相對極值, 如圖示.

由上述二註解知, 找 f 的相對極值時, 僅需局限在 f 的定義域中導函數存在且爲 0 以及導函數不存在的地方即可, 並稱此種可能產生相對極值的數爲臨界數 (critical number), 定義如下.

定義. 在函數 f 的定義域內使得 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的 x 稱作 f 的臨界數.

註 3. 函數 f 的相對極值只可能發生在臨界數的地方, 故尋找相對極值的範圍可由整個定義域縮減至臨界數即可. 再次強調, 臨界數只是可能產生相對極值的地方, 如圖示, 在 $x=a$, b 與 c, $f'(x)=0$ 且在 $x=d$ 與 e, $f'(x)$ 不存在, 一爲轉角, 一爲鉛垂切線, 均爲 f 的臨界數; 但僅在 $x=a$, b 與 d 有相對極值, 在 $x=c$ 與 e 卻無相對極值, 故需進一步確認, 一個方法爲

一階導函數檢定法 (first derivative test). 設 f 爲連續函數. 找相對極值的步驟爲

1. 求 f 的臨界數.

2. 計算 f' 在每一臨界數左右兩邊的符號.

(a) 若經過臨界數 $x = c$ 時, f' 由 $(+)$ 變為 $(-)$, 則在 $x = c$ 有相對極大值 $f(c)$, 如圖示.

(b) 若經過臨界數 $x = c$ 時, f' 由 $(-)$ 變為 $(+)$, 則在 $x = c$ 有相對極小時 $f(c)$, 如圖示.

(c) 若經過臨界數 $x = c$ 時, f' 未變號, 即由 $(+)$ 至 $(+)$ 或由 $(-)$ 至 $(-)$, 則在 $x = c$ 沒有相對極值, 也就是說, $f(c)$ 不是一相對極值, 如圖示.

例 4. 試求 $f(x) = x^{2/3}$ 的相對極值.

<解> 1. 找臨界數. 因為

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

故 f' 不為 0 且 f' 在 $x = 0$ 不存在. 因此, $x = 0$ 是唯一的臨界數.

2. 驗證. 將此一臨界數標示在實數線上並計算 f' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(-\infty, 0)$: $f' = \dfrac{(+)}{(-)} = (-)$, f 遞減

$(0, \infty)$: $f' = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

如圖示. 因此, 由一階導函數檢定法, f 在 $x = 0$ 有相對極小值

$$f(0) = 0$$

例 5. 試求函數

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

的相對極值.

<解> 1. 找臨界數. 因為

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

恆存在, 故令 $f' = 0$, 僅得二個臨界數 $x = -2$ 與 $x = 4$.

2. 驗證. 將此二臨界數標示在實數線上並計算 f' 在分割出的三個子區間上的符號, 得

$(-\infty, -2)$: $f' = (-)(-) = (+)$, f 遞增

$(-2,4)$: $f' = (+)(-) = (-)$, f 遞減

$(4,\infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, f 遞增

如圖示.

因此, 根據一階導函數檢定法, f 在 $x = -2$ 有相對極大值

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) + 32 \\ &= -8 - 12 + 48 + 32 = 60 \end{aligned}$$

且在 $x = 4$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f(4) &= (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) + 32 \\ &= 64 - 48 - 96 + 32 = -48 \end{aligned}$$

例 6. 試求函數

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

的相對極值.

<解> 1. 找臨界數. 對 x 微分並化簡, 得

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

因為 $f' = 0$ 等價於分子

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

得二臨界數 $x = -1$ 與 $x = 1$.

又 f' 在 $x = 0$ 不存在, 但原函數 f 在 $x = 0$ 未定義, 即 $x = 0$ 不在 f 的定義域內, 故由臨界數的定義, $x = 0$ 不是臨界數. 因此僅得二個臨界數 $x = -1$ 與 $x = 1$.

2. 驗證. 將二臨界數 $x = -1$ 與 $x = 1$ 與 f' 不存在的非臨界數 $x = 0$ 均標示在實數線上, 並以空心圓表示不在定義域內的 $x = 0$ (即在此處不會有相對極值, 即使經過 $x = 0$ 時, f' 變號) 以及計算 f' 在分割出的四個子區間上的符號, 得

$(-\infty, -1)$: $f' = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

$(-1, 0)$: $f' = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

$(0, 1)$: $f' = \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$, f 遞減

$(1, \infty)$: $f' = \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$, f 遞增

如圖示. 因此, 根據一階導函數檢定法, f 在 $x=-1$ 有相對極大值

$$f(-1)=-1-1=-2$$

且在 $x=1$ 有相對極小值

$$f(1)=1+1=2$$

註. 上例的相對極大值小於相對極小值, 這是可能發生的, 因爲相對極值僅是函數的局部性質, 並不保證相對極值間的大小關係.

例 7. 設某公司的利潤函數爲

$$P(x)=-0.02x^2+300x-200,000$$

試問何時利潤遞增, 何時遞減?

<解> 令

$$P'(x)=-0.04x+300=-0.04(x-7500)=0$$

得 $x=7500$. 接著, 計算 P' 在分割出的二個子區間上的符號, 得

$(0,7500)$: $P'=(-)(-)=(+)$, P 遞增

$(7500, \infty)$: $P' = (-)(+) = (-)$, P 遞減

如圖示. 因此, 利潤在 $(0, 7500)$ 上遞增且在 $(7500, \infty)$ 上遞減.

例 8. 設某城市由 2001 年至 2008 年的犯罪數約為

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100, \ 0 \leq t \leq 7$$

其中 $t = 0$ 對應於 2001 年年初. 試問此城市的犯罪數何時遞增, 何時遞減?

<解> 因為

$$N'(t) = -0.3t^2 + 3t = -0.3t(t - 10)$$

故計算 N' 在區間 $(0, 7)$ 上的符號, 得

$(0, 7)$: $N' = (-)(+)(-) = (+)$, N 遞增

即犯罪數由 2001 年至 2008 年均呈現遞增.

例 9. 試求函數

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x - 8$$

的相對極值.

<解> 1. 找臨界數. 因爲

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^3 - 6x + 4 = 2(x-1)(x^2+x-2) \\ &= 2(x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

恆存在, 故令 $f' = 0$ 僅得二臨界數 $x = -2$ 與 $x = 1$.

2. 驗證. 將此二臨界數標示在實數線上並計算 f' 在分割出的三個子區間上的符號, 得

$(-\infty, -2)$: $f' = (+)(-) = (-)$, f 遞減

$(-2, 1)$: $f' = (+)(+) = (+)$, f 遞增

$(1, \infty)$: $f' = (+)(+)$, f 遞增

如圖示. 因此, 根據一階導函數檢定法, f 僅在 $x = -2$ 有相對極小值

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{1}{2}(-2)^4 - 3(-2)^3 + 4(-2) - 8 \\ &= 8 - 12 - 8 - 8 = -20 \end{aligned}$$

且在 $x = 1$ 無相對極值.

例 10. 設函數

$$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

試判斷 g 的遞增, 遞減性並求 g 的相對極值.

<解> 1. 找臨界數. 根據除法規則並化簡, 得

$$g'(x)=\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

因爲分子 $x^2+1>0$, 故 g' 恆不爲 0. 又 g' 不存在等價於分母

$$(x^2-1)^2=0$$

得 $x=-1$ 與 $x=1$, 但原函數 g 在此二數未定義, 即此二數不在 g 的定義域內, 故 $x=-1$ 與 $x=1$ 不是臨界數. 因此, g 沒有臨界數, 因而沒有相對極值.

2. 計算 g' 的符號. 將 g' 不存的非臨界數, 亦是不在 g 的定義域內的 $x=-1$ 與 $x=1$ 以空心圓標示在實數線上, 且因

$$g'=(-)\frac{(+)}{(+)}=(-)$$

恆爲負, 如圖示, 故 g 在 $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ 與 $(1,\infty)$ 上均遞減.