單元 17: 微分式
(課本 §3.7)

設某銀行提供的 \$240,000 的 30 年定息房貸的每月支付額爲

$$P = \frac{20,000r}{1-\left(1+\frac{r}{12}\right)^{-360}}$$

其中 r 爲年利率. 若年利率會由目前的 7% 增至確定貸款時的 7.4% 時, 每月需多支付的貸款金額爲何? 一個計算此種因自變數 (如, 年利率 r) 的小量改變而產生的應變數 (如, 月支付房貸額 P) 的改變量及其效果估計的方法爲一函數的微分式 (differential), 此乃本單元所探討的一種概念.

一. 增量 (increments)

設 x 爲一變量且由 x_1 改變至 x_2. 此一改變量

$$x_2 - x_1$$

稱作 x 的增量 (increment in x), 記作 Δx, 讀作 "delta x", 即 x 的增量

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

設自變數 x 與應變數 y 的關係式為

$$y = f(x)$$

若自變數 x 由 x 增至 $x + \Delta x$, 則對應的 y 的改變量稱作 y 的增量 (increment in y), 記作 Δy, 讀作 "delta y", 且定義為

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

如圖示.

例 1. 設函數 $y = x^3$.

(a) 試求 x 由 2 改變至 2.01 的 Δx 與 Δy.

(b) 試求 x 由 2 改變至 1.98 的 Δx 與 Δy.

<解> 令 $f(x) = x^3$. (a) 根據定義, x 的增量

$$\Delta x = 2.01 - 2 = 0.01$$

且 y 的增量

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (2.01)^3 - 2^3 \\ &= 8.120601 - 8 = 0.120601 \end{aligned}$$

(b) 由定義, x 的增量

$$\Delta x = 1.98 - 2 = -0.02$$

且 y 的增量

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = (1.98)^3 - 2^3 \\ &= 7.762392 - 8 = -0.237608\end{aligned}$$

二. 微分式 (differentials)

經由觀察函數 f 的圖形可得一估計由於小的 x 增量 Δx 所產生的 y 的增量 Δy 的相對快速且簡單的方法, 如圖示, 即在切點 $P(x, f(x))$ 附近, 切線 T 非常接近 f 的圖形, 故當 Δx 夠小時, dy 會是一個 Δy 的好估計, 也就是說,

$$\Delta y \approx dy$$

再根據導函數的切線斜率意義, 得切線 T 的斜率

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x) \quad 或 \quad dy = f'(x)\Delta x$$

因此, 表成 f 在 x 的導函數 $f'(x)$, 此估計爲

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$$

並稱 dy 爲 y 的微分式.

定義. 令 $y = f(x)$ 爲一 x 的可微函數. 則

1. 自變數 x 的微分式 dx 定義爲

$$dx = \Delta x$$

2. 應變數 y 的微分式 dy 定義爲

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

註 1. 對自變數 x 而言, Δx 與 dx 沒有差異, 均度量由 x 至 $x + \Delta x$ 的改變.

註 2. 對應變數 y 而言, 增量 Δy 度量當自變數 x 由 x 改變至 $x + \Delta x$ 時, y 的眞實 (實際) 改變 (actual change), 而微分式 dy 乃度量在此相同的 x 改變下, y 的近似改變 (approximate change), 即

$$\Delta y \approx dy$$

註 3. 微分式 dy 取決於 x 與 dx, 但對於固定的 x, dy 是一 dx 的線性函數.

例 2. 令函數 $y = x^3$.

(a) 試求 y 的微分式 dy.

(b) 試以微分式 dy 近似 x 由 2 改變至 2.01 的增量 Δy 並與例 1 的結果比較.

(c) 試以微分式 dy 近似 x 由 2 改變至 1.98 的增量 Δy 並與例 1 的結果比較.

<解> 令 $f(x) = x^3$. (a) 由定義, 得 y 的微分式

$$dy = f'(x)dx = 3x^2dx$$

(b) 代 $x = 2$, $dx = 2.01 - 2 = 0.01$, 得

$$dy = 3x^2dx = 3(2)^2(0.01) = 0.12$$

相當接近眞實的改變 $\Delta y = 0.120601$.

(c) 代 $x = 2$, $dx = 1.98 - 2 = -0.02$, 得

$$dy = 3x^2dx = 3(2)^2(-0.02) = -0.24$$

亦相當接近真實的改變 $\Delta y = -0.237608$.

例 3. 試以微分式估計下列各數值.

(a) $\sqrt{26.5}$

(b) $\sqrt[3]{0.00096}$

(c) $\sqrt{3.98} + \frac{1}{\sqrt{3.98}}$

<解> (a) 選取函數

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

且 $x = 25$ (靠近 26.5, 且易計算出 $\sqrt{25} = 5$), 得

$$dx = 26.5 - 25 = 1.5$$

以及

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \sqrt{26.5} - \sqrt{25} \\
&\approx dy = f'(x)dx \\
&= \left(\left. \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|_{x=25} \right)(1.5) = \frac{1.5}{10} = 0.15
\end{aligned}$$

因此,

$$\sqrt{26.5} \approx \sqrt{25} + 0.15 = 5.15$$

(b) 選取函數

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}$$

且 $x = 0.001 = 10^{-3}$ (靠近 0.00096 且易計算出 $\sqrt[3]{10^{-3}} = 0.1$), 得

$$dx = 0.00096 - 0.001 = -0.00004$$

以及

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \sqrt[3]{0.00096} - \sqrt[3]{10^{-3}} \\
&\approx dy = f'(x)dx \\
&= \left(\left. \frac{1}{3x^{2/3}} \right|_{x=10^{-3}} \right) (-0.00004) \\
&= -\frac{4 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-2}} = -\frac{4}{3} \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{0.00096} &\approx \sqrt[3]{10^{-3}} - \frac{4}{3} \times 10^{-3} \\
&= 10^{-1} - \frac{4}{3} \times 10^{-3} \\
&= \frac{300 - 4}{3000} = \frac{296}{3000} \approx 0.0987
\end{aligned}$$

(c) 選取函數

$$y = f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

且 $x = 4$ (靠近 3.98 且易求出 $f(4) = \frac{5}{2}$), 得

$$dx = 3.98 - 4 = -0.02$$

以及

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(3.98) - f(4) \\ &\approx dy = f'(x)dx \\ &= \left(\frac{1}{2x^{1/2}} - \frac{1}{2x^{3/2}}\bigg|_{x=4}\right)(-0.02) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)\left(-\frac{1}{50}\right) = -\frac{3}{800} \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \sqrt{3.98} + \frac{1}{\sqrt{3.98}} &\approx \frac{5}{2} - \frac{3}{800} \\ &= \frac{2000 - 3}{800} = \frac{1997}{800} \\ &= 2.49625 \end{aligned}$$

例 4. 設以平均速率 v 哩/時 (mph) 駕駛一卡車行經一 500 英哩里程的總花費爲

$$C(v) = 125 + v + \frac{4500}{v}$$

試估計當平均速率由 55 哩/時增至 58 哩/時的總花費改變量.

<解> 取 $v = 55$ 且

$$\Delta v = dv = 58 - 55 = 3$$

得總花費增量

$$\begin{aligned}\Delta C &\approx dC = C'(v)dv \\ &= \left(1 - \left.\frac{4500}{v^2}\right|_{v=55}\right)(3) \\ &= \left(1 - \frac{4500}{3025}\right)(3) = -\frac{1475}{3025}(3) \\ &= -\frac{4425}{3025} \approx -1.46\end{aligned}$$

即總花費約減少 \$1.46, 也許可作爲駕駛經常超越速限 55 哩/時的理由.

例 5. 設某產品的銷售總額 S 與廣告費 x 的關係式爲

$$S(x) = -0.002x^3 + 0.6x^2 + x + 500, 0 \le x \le 200$$

其中 x 與 S 的單位均爲千元. 試以微分式估計廣告費由 \$100,000 增至 \$105,000 時, 銷售總額的改變量.

<解> 取 $x = 100$ 且

$$dx = 105 - 100 = 5$$

得銷售總額增量

$$\begin{aligned}\Delta S &\approx dS = S'(x)dx \\ &= \left(-0.006x^2 + 1.2x + 1\Big|_{x=100}\right)(5) \\ &= (-60 + 120 + 1)(5) = 305\end{aligned}$$

也就是說, 銷售總額約增加 $305,000.

例 6 設一環的內半徑爲 r, 外半徑爲 R 且此二半徑的差 $R - r$ 相對於 r 是夠小的, 如圖示.

(a) 試以微分式估計環面積.

(b) 已知最外層海王星環的內半徑約爲 62,900 公里且放射狀寬 (radial width) 約爲 50 公里. 試估計此星環的面積.

<解> (a) 根據半徑爲 x 的圓面積公式

$$A = f(x) = \pi x^2$$

及微分式概念, 得環面積爲

$$\begin{aligned}\pi R^2 - \pi r^2 &= f(R) - f(r) = \Delta A \\ &\approx dA = f'(r)dr = 2\pi r(R - r)\end{aligned}$$

即環面積近似於內圓周長乘以環寬.

(b) 根據 (a) 並代入 $r = 62900$, $R - r = 50$, 得最外層海王星環的面積約為

$$\begin{aligned} 2\pi(62900)(50) &= 6290000\pi \\ &\approx 1,9760,618 \text{ 公里}^2 \end{aligned}$$

設度量 (或計算) 一真值為 q 的量時, 所產生的誤差為 Δq, 則稱

$$\frac{\Delta q}{q}$$

為度量 (或計算) q 的相對誤差 (relative error). 若將 $\frac{\Delta q}{q}$ 表成百分比 (percentage), 則稱 $\frac{\Delta q}{q}$ 為百分誤差 (percentage error). 因為 $\Delta q \approx dq$, 故常以 $\frac{dq}{q}$ 近似相對誤差, 即

$$\frac{\Delta q}{q} \approx \frac{dq}{q}$$

例 7. 設度量一球軸承 (ball-bearing) 的半徑, 得半徑為 5 吋且最大度量誤差為 ± 0.0002 吋, 則相對誤差約為

$$\frac{dr}{r} = \frac{\pm 0.0002}{5} = \pm 0.0004$$

即百分誤差約爲 $\pm 0.04\%$.

例 8. 設度量一立方體邊長的最大百分誤差爲 2%. 試以微分式估計計算此立方體體積的最大百分誤差.

<解> 設立方體的邊長爲 x, 則體積 $V = x^3$. 由微分式

$$dV = V'(x)dx = 3x^2dx$$

得體積的相對誤差

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3x^2dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x}$$

因此, 代

$$\left|\frac{dx}{x}\right| \le 0.02$$

得

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{dV}{V}\right| = 3\left|\frac{dx}{x}\right| \le 3(0.02) = 0.06$$

即計算立方體體積的最大百分誤差約爲 6%.

例 9. 設某國家的大豆需求方程式爲

$$p = f(x) = \frac{55}{2x^2+1}$$

其中 p 的單位: 元/蒲式耳 (bushel, 合八加侖) 且年需求量 x 的單位: 十億蒲式耳 (billions of bushels). 經濟學家預測將有 1.8 單位的收成且最大預測誤差爲 15%. 試求每蒲式耳大豆的預測售價的最大誤差.

<解> 因爲

$$p'(x) = -\frac{55}{(2x^2+1)^2}(4x) = -\frac{220x}{(2x^2+1)^2}$$

故由微分式, 得預測售價的誤差

$$\Delta p \approx dp = p'(x)dx = -\frac{220x}{(2x^2+1)^2}dx$$

代 $x = 1.8$ 及

$$|dx| \leq (1.8)(0.15) \leq 0.27$$

得

$$|\Delta p| \approx |dp| \leq \left| -\frac{220(1.8)}{(2(1.8)^2+1)^2}(0.27) \right| \approx 1.911$$

即預測售價的最大誤差約爲 $\pm\$1.911$/蒲式耳.