單元 14: 經濟上的邊際函數
(課本 §3.4)

邊際分析 (marginal analysis) 就是探討經濟量的變化率, 如國內生產總值 (GDP, gross domestic product) 在一給定時間的成長速率或衰退速率, 或在某一生產水準 (產量, level of production) 的總成本變化率等. 以例說明經濟學間使用 "邊際" 的意義.

一. 成本函數 (cost function)

例 1. 設某公司製造 x 台冰箱的總成本函數

$$C(x) = 8000 + 200x - 0.2x^2,\ 0 \le x \le 400$$

(a) 試問製造第 251 台冰箱的眞實成本 (actual cost, 實際成本) 爲何?

(b) 試求在 $x = 250$ 時, 總成本函數對 x 的變化率.

(c) 試比較 (a) 與 (b) 的結果.

<解> (a) 製造第 251 台冰箱的實際成本為前 251 台冰箱的總成本與前 250 台冰箱的總成本的差, 即

$$\begin{aligned} & C(251) - C(250) \\ &= [8000 + 200(251) - 0.2(251)^2] - \\ &\qquad [8000 + 200(250) - 0.2(250)^2] \\ &= 45,599.8 - 45,500 = 99.8 \end{aligned}$$

(b) 由導函數的變化率意義, 總成本對 x 的變化率為

$$C'(x) = 200 - 0.4x$$

故當產量為 250 台時, 總成本的變化率為

$$C'(250) = 200 - 0.4(250) = 100$$

(c) 比較 (a) 與 (b), 得生產第 251 台冰箱的眞正成本 \$99.8/台 可被產量為 250 台冰箱的總成本變化率 \$100/台 近似, 即

$$C(251) - C(250) \approx C'(250)$$

為何有此現象? 因為

$$C(251) - C(250) = \frac{C(251) - C(250)}{1}$$

表示在區間 $[250, 251]$ 內的平均變化率, 而 $C'(250)$ 表示總成本在 $x = 250$ 的瞬間變化率, 故由導函數定義的變化率意義 (或斜率意義),

$$\begin{aligned}
&C(251) - C(250) \\
&\quad = \frac{C(251) - C(250)}{1} \\
&\quad \approx \frac{C(250 + h) - C(250)}{h} \quad (\text{當 } h \text{ 夠小時}) \\
&\quad \approx \lim_{h \to 0} \frac{C(250 + h) - C(250)}{h} = C'(250)
\end{aligned}$$

如圖示.

註 1. 在某一產量時, 再多生產一件產品的眞正 (實際) 成本 (actual cost) 稱作邊際成本 (marginal cost), 可被在此一產量時的總成本變化率近似, 故經濟學家定義總成本函數的導函數 C' 爲邊際成本函數 (marginal cost function), 即在產量爲 x 時,

$$\begin{aligned}
\text{邊際成本} &= C(x + 1) - C(x) \\
&\approx C'(x) = \text{邊際成本函數在 } x \text{ 的值}
\end{aligned}$$

也就是說, 形容詞 "邊際 (marginal)" 同義於 " $\cdots$ 的導函數 (derivative of)".

例 2. 設某公司製造 DVD 播放機的每日總成本爲

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 500$$

其中 x 爲每日產量.

(a) 試求邊際成本函數.

(b) 當 $x = 200$, 300, 400 與 600 時的邊際成本爲何? 如何解釋?

<解> (a) 由定義, 邊際成本函數爲

$$C'(x) = 0.0003x^2 - 0.16x + 40$$

(b) 代 $x = 200$, 得

$$\begin{aligned} C'(200) &= 0.0003(200)^2 - 0.16(200) + 40 \\ &= 12 - 32 + 40 = 20 \end{aligned}$$

表示當產量爲 200 台時, 再多生產一台, 即生產第 201 台 DVD 播放機的實際成本 (邊際成本) 約爲 \$20.

代 $x = 300$, 得

$$\begin{aligned} C'(300) &= 0.0003(300)^2 - 0.16(300) + 40 \\ &= 27 - 48 + 40 = 19 \end{aligned}$$

表示當產量爲 300 台時, 再多生產一台, 即生產第 301 台 DVD 播放機的眞實成本 (邊際成本) 約爲 \$19.

代 $x = 400$, 得

$$\begin{aligned} C'(400) &= 0.0003(400)^2 - 0.16(400) + 40 \\ &= 48 - 64 + 40 = 24 \end{aligned}$$

表示當產量爲 400 台時, 生產第 401 台 DVD 播放機的眞正成本 (邊際成本) 約爲 \$24.

代 $x = 600$, 得

$$\begin{aligned} C'(600) &= 0.0003(600)^2 - 0.16(600) + 40 \\ &= 108 - 96 + 40 = 52 \end{aligned}$$

表示當產量爲 600 台時, 再多生產一台, 即生產第 601 台 DVD 播放機的實際成本 (邊際成本) 約爲 \$52.

註. 此一額外一台的較高成本可能由於在產量爲 600 台時, 較高的加班費及維護費用或生產設備在過度負荷下的當機所造成.

二. 平均成本函數 (average cost function)

設 $C(x)$ 為生產 x 件產品的總成本, 則平均成本函數, 記為 $\overline{C}(x)$, 讀作 "C bar of x", 定義為

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

且平均成本函數的導函數 $\overline{C}'(x)$ 稱作邊際平均成本函數 (marginal average cost function), 表示平均生產成本對產量的變化率, 可作為再多生產一件產品時, 眞實平均成本的近似值.

例 3. 設生產某產品 x 件的總成本為

$$C(x) = 400 + 20x \text{ 元}$$

(a) 試求平均成本函數 $\overline{C}$.

(b) 試求邊際平均成本函數 $\overline{C}'$.

(c) 經濟上的含意為何?

<解> (a) 由定義, 平均成本函數

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 20 + \frac{400}{x}$$

(b) 對 x 微分, 得邊際平均成本函數

$$\overline{C}'(x) = -\frac{400}{x^2}$$

(c) 因爲對所有可能的 x, $\overline{C}'(x) < 0$, 故每多生產一件, 平均成本約降低 $\overline{C}'(x)$ 元, 即當產量 x 增加時, 平均成本會呈現遞減. 此外,

$$\overline{C}(x) = 20 + \frac{400}{x} > 20$$

且

$$\lim_{x\to\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x\to\infty} \left(20 + \frac{400}{x}\right) = 20$$

表示 $\overline{C}(x)$ 的圖形在水平線 $y = 20$ 之上且以遞減的方式愈來愈接近此水平線, 如圖示. 由經濟上的含意, 此結果乃預期的, 因爲每件的固定成本 $\frac{400}{x}$ 穩定地下降, 故平均成本就會愈來愈接近生產每件產品的常數成本 \$20.

例 4. 設生產 x 台 DVD 播放機的每日總成本爲

$$C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5000$$

(a) 試求平均成本函數 $\overline{C}$.

(b) 試求邊際平均成本函數 $\overline{C}'$ 並計算 $\overline{C}'(500)$.

(c) 試繪 $\overline{C}$ 的圖形並解釋 (a) 與 (b) 的結果.

<解> (a) 由定義, 平均成本函數

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 0.0001x^2 - 0.08x + 40 + \frac{5000}{x}$$

(b) 對 x 微分, 得邊際平均成本函數

$$\overline{C}'(x) = 0.0002x - 0.08 - \frac{5000}{x^2}$$

代 $x = 500$, 得

$$\begin{aligned}\overline{C}'(500) &= 0.0002(500) - 0.08 - \frac{5000}{(500)^2} \\ &= 0.1 - 0.08 - 0.02 = 0\end{aligned}$$

(c) 根據

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{500}{x} = \frac{500}{0^+} = \infty$$

且由 $\overline{C}'(500) = 0$ 得知過點 $(500, 35)$ 有一水平切線並經由描 $x = 100$, 200, 300, ..., 900 所對應的點,

得 $\overline{C}(x)$ 的圖形, 如圖示. 如預期, 平均成本隨著產量增加而遞減, 但與例 3 所不同的是, 平均成本到達最小值 \$35 及所對應的產量 500 件後, 會隨著產量增加又開始遞增.

註. 在邊際成本從某產量以後開始遞增的情況下, 上述平均成本隨著產量的增加先遞減再遞增的現象是非常典型的 (typical), 如例 4; 與此現象成對比的是邊際成本爲一常數時, 平均成本會隨的產量的增加恆遞減, 如例 3.

三. 收益函數 (revenue function)

產品的單價 (售價) 取決於公司在其中運作的市場. 若爲競爭市場, 沒有一家公司可決定 (dictate, 命令) 售價, 而由市場平衡所決定; 反之, 若爲單一供應者, 即獨占市場 (monopoly), 則可藉由控制產量而操控單價. 產量的單價 (售價) p 與需求量 x 有關, 此種 p 與 x 的關係稱作需求方程式 (demand equation). 解 p, 即將 p 表成 x, 得單價函數

$$p = f(x)$$

由此得收益函數

$$R(x) = px = xf(x)$$

表示銷售 x 件產品的收入.

在給定一銷售量下, 再多銷售一件產品的眞正 (實際) 收益 (actual revenue) 稱作邊際收益. 經由成本函數論述的類推, 邊際收益可被收益函數的導函數在此一銷售量的值所近似, 故定意收益函數的導函數 R' 爲邊際收益函數 (marginal revenue function), 即在銷售量爲 x 件時,

$$\begin{aligned} \text{邊際收益} &= R(x+1) - R(x) \\ &\approx R'(x) = \text{邊際收益函數在 } x \text{ 的值} \end{aligned}$$

例 5. 設某揚聲器 (loudspeaker system) 的單價 p 與需求量 x 的關係方程式爲

$$p = -0.02x + 400,\ 0 \le x \le 20,000$$

(a) 試求收益函數 R.

(b) 試求邊際收益函數 R'.

(c) 計算並解釋 $R'(2000)$.

<解> (a) 由定義, 收益函數

$R(x) = px = -0.02x^2 + 400x,\ 0 \le x \le 20,000$

(b) 對 x 微分, 得邊際收益函數

$$R'(x) = -0.04x + 400$$

(c) 代 $x = 2000$, 得

$$\begin{aligned} R'(2000) &= -0.04(2000) + 400 \\ &= -80 + 400 = 320 \end{aligned}$$

表示在銷售量爲 2000 組時, 再多賣一組, 即銷售第 2001 組揚聲器的眞實收益大約是 \$320.

利潤函數 (profit function)

設 x 爲製造與銷售的產品數量且 $R(x)$ 與 $C(x)$ 分別爲收益函數與成本函數, 則利潤函數 P 定義爲

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

同理, 定義利潤函數的導函數 P' 爲邊際利潤函數 (marginal profit function), 其在 x 的值可作爲銷售第 $x+1$ 件產品所獲得的實際利潤 (稱作邊際利潤,

marginal profit) 的近似, 也就是說, 當生產並銷售 x 件產品時,

$$\begin{aligned} \text{邊際利潤} &= P(x+1) - P(x) \\ &\approx P'(x) = \text{邊際利潤函數在 } x \text{ 的值} \end{aligned}$$

例 6. 接續例 5. 設生產 x 組揚聲器的成本爲

$$C(x) = 100x + 200,000 \text{ 元}$$

(a) 試求利潤函數 P.

(b) 試求邊際利潤函數 P'.

(c) 計算並解釋 $P'(2000)$.

(d) 試繪利潤函數 P 的圖形.

<解> (a) 由例 5, 收益函數

$$R(x) = -0.02x^2 + 400x$$

因此, 根據定義, 利潤函數

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0.02x^2 - 300x - 20,000 \end{aligned}$$

(b) 對 x 微分, 得邊際利潤函數

$$P'(x) = -0.04x + 300$$

(c) 代 $x = 2000$, 得

$$\begin{aligned} P'(2000) &= -0.04(2000) + 300 \\ &= -80 + 300 = 220 \end{aligned}$$

表示在銷售量爲 2000 組時, 再多賣一組, 即銷售第 2001 組揚聲器的眞正利潤約爲 \$220.

(d) 因爲 $P(x)$ 爲一領導項係數爲負的二次多項式函數, 故爲一開口向下的拋物線, 如圖示.

五. 需求彈性 (elasticity of demand)

經濟學家用於分析需求函數的一重要準則爲需求彈性. 爲方便計, 將需求函數 f 表成

$$x = f(p)$$

的型式, 即由需求方程式解 x, 將需求量 x 表成單價 p 的函數, 通常爲單價 p 的遞減函數, 也就是說, 隨著單價的提高, 需求量會下降, 如圖示.

問. 下降的程度如何? 如何度量不同的下降程度?

答. 設單價由 p 元增至 $p+h$ 元, 即增加了 h 元, 則對應的需求量會由 $f(p)$ 件降至 $f(p+h)$ 件, 而有 $f(p+h)-f(p)$ 件的變化, 如圖示.

接著, 爲客觀起見, 考慮單價變化百分比 (percentage change in unit price)

$$\frac{h}{p}(100) \qquad \frac{\text{單價變化量}}{\text{單價 } p}(100)$$

以及對應的需求變化百分比 (percentage change in quantity demanded)

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}(100) \qquad \frac{\text{需求變化量}}{\text{在售價 } p \text{ 的需求量}}(100)$$

則一種度量單價變化百分比對於需求變化百分比的影響 (effect, 效用) 程度可定義爲此二百分比的比率 (比值), 即

$$\frac{\text{需求變化百分比}}{\text{單價變化百分比}} = \frac{100\left[\frac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}\right]}{100\left(\frac{h}{p}\right)}$$

經由化簡整理, 得

$$\frac{\text{需求變化百分比}}{\text{單價變化百分比}} = \frac{\frac{f(p+h)-f(p)}{h}}{\frac{f(p)}{p}} \tag{1}$$

若 f 在 p 可微, 則當 h 夠小時,

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \approx f(p)$$

代入 (1) 式, 得

$$\frac{\text{需求變化百分比}}{\text{單價變化百分比}} \approx \frac{f'(p)}{\frac{f(p)}{p}} = \frac{pf'(p)}{f(p)} \tag{2}$$

註. 因爲 $x = f(p)$ 遞減, 故 $f(p+h) - f(p) < 0$, 或 $f'(p) < 0$, 由 (1) 或 (2) 式, 得此比值恆爲負; 經濟學家定義負的比值爲需求彈性, 用來描述單價改變對需求量的影響程度.

定義. 設 f 爲一由 $x = f(p)$ 所定義的可微函數, 則在單價 p 的需求彈性定義爲

$$E(p) = -\frac{pf'(p)}{f(p)}$$

例 7. 設某揚聲器的單價 p 與需求量 x 的需求方程式爲

$$p = -0.02x + 400,\ 0 \le x \le 20,000$$

(a) 試求需求彈性 $E(p)$.

(b) 計算並解釋 $E(100)$.

(c) 計算並解釋 $E(300)$.

<解> (a) 首先, 解 x, 得

$$\begin{aligned} x &= f(p) = \frac{1}{0.02}(400 - p) = 50(400 - p) \\ &= -50p + 20,000,\ 0 \le p \le 400 \end{aligned}$$

接著, 對 p 微分, 得

$$f'(p) = -50$$

因此, 根據定義, 需求彈性

$$\begin{aligned} E(p) &= -\frac{pf'(p)}{f(p)} = -\frac{p(-50)}{-50p + 20,000} \\ &= \frac{p}{400 - p},\ 0 \le p \le 400 \end{aligned}$$

(b) 代 $p = 100$, 得在單價 \$100 的需求彈性

$$E(100) = \frac{100}{400 - 100} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

表示單價定爲 \$100 時, 增加 1% 的單價會導致約 0.33% 的銷售量下降.

爲何是下降? 因爲需求彈性是負的百分比比值, 故正的需求彈性表示百分比比值爲負, 因而下降.

(c) 代 $x = 300$, 得在單價 \$300 的需求彈性

$$E(300) = \frac{300}{400 - 300} = 3$$

表示單價定爲 \$300 時, 增加 1% 的單價會導致約 3% 的銷售量下降.

經濟學家通常用下列術語以需求彈性描述產品的需求.

定義. 描述產品需求的術語爲

1. 若 $E(p) > 1$, 則稱需求爲彈性的 (elastic).

2. 若 $E(p) = 1$, 則稱需求爲單一的 (unitary).

3. 若 $E(p) < 1$, 則稱需求爲無彈性的 (inelastic).

註. 需求是彈性的表示小的單價變化百分比會導致大的需求變化百分比; 單價是無彈性的表示小的單價百分比會導致小的需求變化百分比; 需求是單一的表示小的單價百分比會導致相同的需求變化百分比.

六. 需求彈性與收益

可採用需求彈性的概念描述收益對單價變化的回應方式. 設某產品的單價 p 與需求量 x 的關係爲方程式

$$x = f(p)$$

則在單價爲 p 時, 銷售 x 件產品的收益

$$R(p) = px = pf(p)$$

根據乘法規則, 對 p 微分, 得對應於單價 p 的收益變化率爲

$$\begin{aligned} R'(p) &= f(p) + pf'(p) = f(p)\left[1 + \frac{pf'(p)}{f(p)}\right] \\ &= f(p)[1 - E(p)] \end{aligned}$$

(1) 設單價爲 a 元時, 需求是彈性的, 則 $E(a) > 1$. 又 $f(p)$ 恆爲正, 得

$$R'(a) = f(a)[1 - E(a)] = (+)(-) < 0$$

故在 $p = a$ 時, $R(p)$ 是遞減的, 表示單價的小量增加會導致收益下降; 反之, 單價是小量的減少會導致收益的增加, 即

$$p\uparrow,\ R\downarrow; \quad p\downarrow,\ R\uparrow$$

等價於需求是彈性的.

(2) 若單價爲 a 元時, 需求是無彈性的, 則 $E(a) < 1$ 且

$$R'(a) = f(a)[1 - E(a)] = (+)(+) > 0$$

故在 $p = a$ 時, $R(p)$ 是遞增的, 表示單價的小量增加會導致收益增加; 反之, 單價的小量減少會導致收益的下降, 即

$$p\uparrow,\ R\uparrow; \quad p\downarrow,\ R\downarrow$$

等價於需求是無彈性的.

(3) 若單價爲 a 元時, 需求是單一的, 則 $E(a) = 1$ 且

$$R'(a) = f(a)[1 - E(a)] = (+)(0) = 0$$

故在 $p = a$ 時, $R(p)$ 不增也不減, 表示單價的小量增加或減少不會造成收益的變化, 即

$$p\uparrow\downarrow,\ R \text{ 不變}$$

等價於需求是單一的, 如圖示.

摘要. 綜合上述, 得

1. 若需求在單價 p 是彈性的 $[E(p) > 1]$, 則漲價會減少收益; 反之, 降價會增加收益.

2. 若需求在單價 p 是無彈性的 $[E(p) < 1]$, 則漲價會增加收益; 反之, 降價會減少收益.

3. 若需求在單價 p 是單一的 $[E(p) = 1]$, 則漲價或降價均維持原收益.

例 8. 接續例 7. (a) 當 $p = 100$ 時,

$$E(100) = \frac{1}{3} < 1$$

表示需求是無彈性的, 因而單價些微的上漲會增加收益.

(b) 當 $p = 300$ 時,

$$E(p) = 3 > 1$$

表示需求是彈性的, 因而單價些微的上漲會減少收益; 反之, 單價些微的下降會增加收益.